EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais

Programa novo implementado em 2005/2006

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**

2006

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

Identifique claramente os grupos e os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 11.

A prova inclui um formulário (pág. 3).

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $\quad$ (α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ (α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r *– raio da base*; g *– geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r *– raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\qquad$ (r *– raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}$, $k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\, v + u\,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\, v - u\,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\, u^{n-1}\,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\, e^u$

$(a^u)' = u'.\, a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

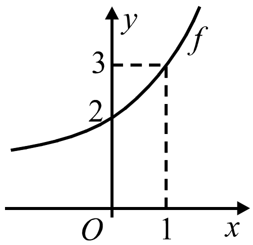
Grupo I

- Os sete itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra, o item será anulado, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Sejam a e b dois números reais positivos.

Na figura está parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a^x + b$.

Tal como a figura sugere, os pontos $(0, 2)$ e $(1, 3)$ pertencem ao gráfico de f.



Quais são os valores de a e de b?

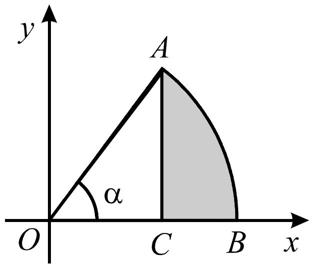
(A) $a = 2$ e $b = 1$ **(B)** $a = 2$ e $b = 3$

(C) $a = 3$ e $b = 2$ **(D)** $a = 3$ e $b = 1$

2. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, um arco AB, que está contido na circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$.

O ponto C pertence ao eixo Ox e o segmento de recta $[AC]$ é perpendicular a este eixo.

α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB.



Qual é a expressão que dá o perímetro da região sombreada, em função de α?

(A) $\pi \times \alpha + \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha$ **(B)** $\pi \times \alpha + \operatorname{sen} \alpha + 1 - \cos \alpha$

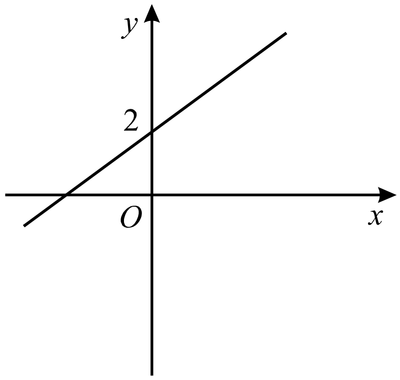
(C) $1 + \alpha - \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha$ **(D)** $1 + \alpha + \operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha$

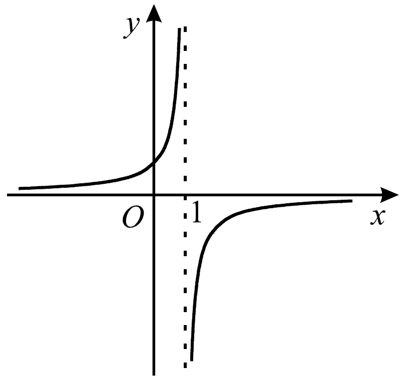
3. De duas funções, f e g, sabe-se que:

• o gráfico de f é uma recta, cuja ordenada na origem é igual a 2;

• o gráfico de g é uma hipérbole.

Nas figuras seguintes estão representadas parte dessa recta e parte dessa hipérbole.



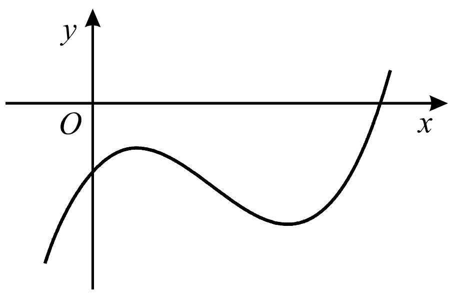


A recta de equação $x = 1$ é assimptota do gráfico de g

Indique o valor de $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** $+\infty$ **(D)** $-\infty$

4. Na figura abaixo está parte do gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R}$.



Sejam h' e h'' a primeira e a segunda derivadas de h, respectivamente.

Admita que estas duas funções também têm domínio $\mathbb{R}$.

Qual das expressões seguintes designa um número positivo?

(A) $h(0) + h''(0)$ **(B)** $h(0) - h'(0)$

(C) $h'(0) - h''(0)$ **(D)** $h'(0) \times h''(0)$

5. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	a	a	$0{,}4$

(a designa um número real).

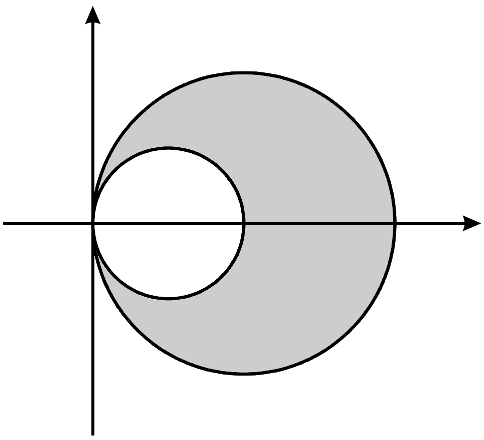
Qual é o valor médio desta variável aleatória ?

(A) $1{,}1$ **(B)** $1{,}2$ **(C)** $1{,}3$ **(D)** $1{,}4$

6. Quatro raparigas e quatro rapazes entram num autocarro, no qual existem seis lugares sentados, ainda não ocupados.
De quantas maneiras diferentes podem ficar ocupados esses seis lugares, supondo que ficam dois rapazes em pé?

(A) $3\,560$ **(B)** $3\,840$ **(C)** $4\,180$ **(D)** $4\,320$

7. Na figura estão representadas, no plano complexo, duas circunferências, ambas com centro no eixo real, tendo uma delas raio 1 e a outra raio 2.



A origem do referencial é o único ponto comum às duas circunferências.

Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira?

(A) $|z-1| \geq 1 \;\wedge\; |z-2| \leq 2$ **(B)** $|z-1| \geq 2 \;\wedge\; |z-2| \leq 1$

(C) $|z-1| \leq 1 \;\wedge\; |z-2| \geq 2$ **(D)** $|z-1| \leq 2 \;\wedge\; |z-2| \geq 1$

Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

1.1. Considere $z_1 = (2 - i)\left(2 + cis\frac{\pi}{2}\right)$ e $z_2 = \frac{1}{5}\,cis\left(-\frac{\pi}{7}\right)$

Sem recorrer à calculadora, escreva o número complexo $\frac{z_1}{z_2}$ na forma trigonométrica.

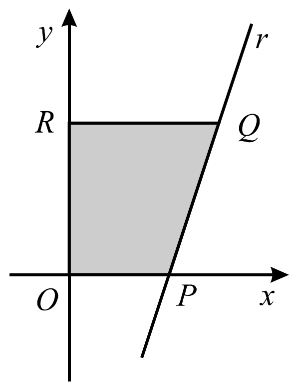
1.2. Seja z um número complexo cuja imagem geométrica, no plano complexo, é um ponto A situado no primeiro quadrante.
Seja B a imagem geométrica de $\overline{z}$, conjugado de z.
Seja O a origem do referencial.
Sabe-se que o triângulo $[AOB]$ é equilátero e tem perímetro 6.
Represente o triângulo $[AOB]$ e determine z na forma algébrica.

2. Seja f a função, de domínio $]1, +\infty[$, definida por $f(x) = x + x\ln(x-1)$.
Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes:

2.1. Estude a função quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

2.2. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy, uma recta r e um trapézio $[OPQR]$.

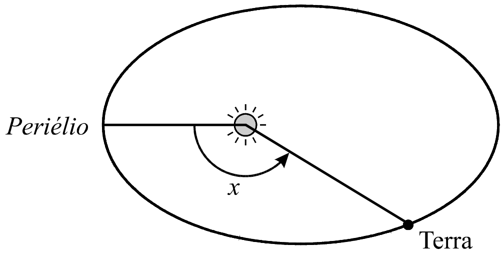
- Q tem abcissa 2 e pertence ao gráfico de f (o qual não está representado na figura);
- r é tangente ao gráfico de f no ponto Q;
- P é o ponto de intersecção da recta r com o eixo Ox;
- R pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à do ponto Q.



Determine a área do trapézio $[OPQR]$. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3. Como sabe, a Terra descreve uma órbita elíptica em torno do Sol.

Na figura está representado um esquema dessa órbita. Está assinalado o *periélio*, o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol.



Na figura está assinalado um ângulo de amplitude x radianos $(x \in [0, 2\pi[)$.
Este ângulo tem o seu vértice no Sol, o seu lado origem passa no *periélio* e o seu lado extremidade passa na Terra.

A distância d, em milhões de quilómetros, da Terra ao Sol, é (aproximadamente) dada, em função de x, por $d = 149{,}6\ (1 - 0{,}0167\ \cos x)$

3.1. **Sem recorrer à calculadora**, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, determine a distância máxima e a distância mínima da Terra ao Sol. Apresente os valores pedidos em milhões de quilómetros, arredondados às décimas.

3.2. Sabe-se que x verifica a relação $\frac{2\pi t}{T} = x - 0{,}0167\ \operatorname{sen} x$, em que

- t é o tempo, em dias, que decorre desde a passagem da Terra pelo *periélio* até ao instante em que atinge a posição correspondente ao ângulo x;
- T é o tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa ($365{,}24$ dias).

3.2.1. Mostre que, para $x = \pi$, se tem $t = \frac{T}{2}$.

Interprete este resultado no contexto da situação descrita.

3.2.2. Sabe-se que a última passagem da Terra pelo *periélio* ocorreu a uma certa hora do dia 4 de Janeiro. Determine a distância a que a Terra se encontrava do Sol, à mesma hora do dia 14 de Fevereiro. Apresente o resultado em milhões de quilómetros, arredondado às décimas. Nos valores intermédios, utilize, no mínimo, quatro casas decimais.

Nota: a resolução desta questão envolve uma equação que deve ser resolvida graficamente, com recurso à calculadora; apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de algum, ou de alguns, ponto(s).

4. Seja $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = f(2) = 0$ e $f(1) > 0$
Prove que existe pelo menos um número real c no intervalo $]0, 1[$ tal que $f(c) = f(c + 1)$

Sugestão: considere a função $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - f(x + 1)$

5. Numa sala de Tempos Livres, a distribuição dos alunos por idades e sexo é a seguinte:

	5 anos	6 anos	7 anos
Rapaz	1	5	2
Rapariga	3	5	7

5.1. Escolhem-se dois alunos ao acaso.
Qual é a probabilidade de a soma das suas idades ser igual a 12? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

5.2. Escolhe-se um aluno ao acaso.
Sejam A e B os acontecimentos:

A: «*o aluno tem 7 anos*»;

B: «*o aluno é rapaz*».

Indique, justificando, o valor da probabilidade condicionada $P(B|A)$. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Nota: no caso de utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, explicite os valores das duas probabilidades envolvidas nessa fórmula.

6. Uma turma de 12.º ano é constituída por raparigas, umas de 16 anos e as restantes de 17 anos, e por rapazes, uns de 17 anos e os restantes de 18 anos.
Os alunos dessa turma estão numerados consecutivamente, a partir do número 1.
Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa turma e regista-se o número, a idade e o sexo desse aluno.
Em cada uma das opções seguintes estão indicados dois acontecimentos, X e Y, associados a esta experiência aleatória.

Opção 1: X : «O aluno escolhido tem idade superior ou igual a 17 anos»
Y : «O aluno escolhido tem 16 ou 17 anos»

Opção 2: X : «O número do aluno escolhido é par»
Y : «O número do aluno escolhido é múltiplo de 4»

Opção 3: X : «O aluno escolhido tem 18 anos»
Y : «O aluno escolhido é rapariga»

Opção 4: X : «O aluno escolhido é rapaz»
Y : «O aluno escolhido tem 17 anos»

Em apenas uma das opções acima apresentadas os acontecimentos X e Y são tais que são verdadeiras as três afirmações seguintes:

$$P(X \cup Y) > P(X), \quad P(X \cup Y) < 1 \quad \text{e} \quad P(X \cap Y) > 0$$

Qual é essa opção? Numa pequena composição, explique por que é que rejeita as outras três opções (para cada uma delas, indique, **justificando**, qual é a afirmação falsa).

FIM

COTAÇÕES

Grupo I	**63**
Cada resposta certa	9
Cada resposta errada	0
Cada questão não respondida ou anulada	0
Grupo II	**137**
1.	21
1.1.	12
1.2.	9
2.	28
2.1.	14
2.2.	14
3.	42
3.1.	14
3.2.	28
3.2.1.	14
3.2.2.	14
4.	14
5.	18
5.1.	9
5.2.	9
6.	14
TOTAL	**200**

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais

Programa novo implementado em 2005/2006

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**

2006

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada.. 0
Cada questão não respondida ou anulada 0

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 12
1.2. 9

2. 28
2.1. 14
2.2. 14

3. 42
3.1. 14
3.2. 28
3.2.1. 14
3.2.2. 14

4. 14

5. 18
5.1. 9
5.2. 9

6. 14

TOTAL **200**

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anulados todos os itens com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todos os itens em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	A	D	A	C	A	D	A
Versão 2	B	C	A	B	D	D	C

Grupo II

Critérios gerais

1. Se o examinando se enganar na identificação do item a que está a responder, ou se a omitir, mas, pela resolução apresentada, for possível identificá-lo inequivocamente, a resposta deve ser vista e classificada.

2. Se o examinando apresentar mais do que uma resposta a um item, e não indicar, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada, deve ser vista e classificada apenas a que se encontra em primeiro lugar, na folha de resposta.

3. As cotações a atribuir às respostas dos examinandos são expressas obrigatoriamente em números inteiros.

4. Num item em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, a cotação a atribuir deve estar de acordo com o seguinte critério:
- Se o examinando se limitar a apresentar o resultado final, a cotação deve ser de 0 (zero) pontos.
- Se o examinando não se limitar a apresentar o resultado final, a cotação deve ser a soma algébrica das cotações atribuídas a cada etapa, de acordo com o disposto nos pontos 6, 7, 8 e 9 destes critérios gerais, e das desvalorizações previstas nos pontos 10 e 11 destes critérios gerais. Se a soma for negativa, a cotação a atribuir é de 0 (zero) pontos.

5. Alguns itens da prova podem ser correctamente resolvidos por mais do que um processo. Sempre que o examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nos critérios específicos, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas. Salienta-se que deve ser aceite qualquer processo cientificamente correcto, mesmo que envolva conhecimentos não contemplados no programa da disciplina.

6. A cotação de cada item está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para o resolver.

6.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.

6.2. O classificador não pode subdividir, em cotações parcelares, a cotação atribuída a cada etapa.
Caso uma etapa envolva um único passo, testando apenas o conhecimento de um só conceito ou propriedade, e a sua resolução não esteja completamente correcta, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos.
Caso uma etapa envolva mais do que um passo (por exemplo, o cálculo da derivada de uma função, a resolução de uma equação, a obtenção de uma expressão em função de uma variável, etc.) e a sua resolução esteja incompleta, ou contenha incorrecções, a cotação a atribuir deve estar de acordo com o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:

- erros de contas ocasionais devem ser desvalorizados em um ponto;
- erros que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades devem ser desvalorizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa;
- transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em um ponto, desde que o grau de dificuldade da etapa não diminua;
- transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em, pelo menos, metade da cotação da etapa, caso o grau de dificuldade da etapa diminua.

6.3. Nas etapas cuja cotação se encontra discriminada por níveis de desempenho, o classificador deve enquadrar a resposta do examinando numa das descrições apresentadas. O classificador não pode atribuir uma cotação diferente das indicadas.

6.4. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.

6.5. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.

6.6. Pode acontecer que o examinando, ao resolver um item, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios específicos. Todas as etapas não percorridas explicitamente pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam inequivocamente implícitos na resolução do item, devem receber a cotação indicada.

7. Quando, num item, é pedida uma forma específica de apresentação do resultado final (por exemplo, «em minutos», «em percentagem», etc.), este deve ser apresentado na forma pedida. Se o resultado final apresentado pelo examinando não respeitar a forma pedida no enunciado (por exemplo, se o enunciado pedir o resultado em minutos, e o examinando o apresentar em horas), devem ser atribuídos 0 (zero) pontos à etapa correspondente ao resultado final. No entanto, a cotação não deve ser desvalorizada caso o examinando não indique a unidade em que é pedido o resultado (por exemplo, se o resultado final for 12 minutos, ou 12 metros, e o examinando escrever simplesmente 12, não se deve aplicar nenhuma desvalorização). Se não for pedida aproximação para o resultado final, o examinando deve apresentar o valor exacto. Se o examinando apresentar, como resultado final, uma aproximação do valor exacto, deve ser aplicada uma desvalorização de 1 ponto na cotação a atribuir à etapa correspondente ao resultado final.

8. O examinando deve respeitar sempre a instrução relativa à apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações. Se, numa etapa, o examinando não respeitar esta instrução, apresentando algo (valor, quadro, tabela, gráfico, etc.) que não resulte de trabalho anterior, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos a essa etapa. Todas as etapas subsequentes que dela dependam devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.

9. O examinando deve respeitar sempre qualquer instrução relativa ao método a utilizar na resolução de um item (por exemplo, «sem recorrer à calculadora», «equacione o problema», «resolva graficamente», etc.). Na resolução apresentada pelo examinando, deve ser inequívoco, pela apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações, o cumprimento da instrução. Se tal não acontecer, considera-se que o examinando não respeitou a instrução. A etapa em que se dá o desrespeito e todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.

10. Se, na resolução de um item, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), a cotação total a atribuir ao item deve ser desvalorizada em um ponto. Esta desvalorização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos, nem a eventuais utilizações do símbolo de igualdade, onde, em rigor, deveria estar o símbolo de igualdade aproximada.

11. Existem itens em cujo enunciado é dada uma instrução relativa ao número mínimo de casas decimais que o examinando deve conservar sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos. Indicam-se, a seguir, as desvalorizações a aplicar, na cotação total a atribuir ao item, em caso de desrespeito dessa instrução e/ou de arredondamentos mal efectuados.

Todos os valores intermédios estão de acordo com a instrução, mas existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado.. -1 ponto

Todos os valores intermédios estão bem arredondados, mas existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução... -1 ponto

Existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado e existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução .... -2 pontos

Critérios específicos

1.1. 12

Escrever z_1 na forma algébrica 6

$cis\,\frac{\pi}{2} = i$ 2

Restantes cálculos 4

Calcular $\frac{z_1}{z_2}$ 6

Escrever z_1 na forma trigonométrica 2

Efectuar a divisão na forma trigonométrica 4

1.2. .... **9**

Representar o triângulo $[AOB]$ no plano complexo **(ver nota 1)** 3

Escrever z na forma $x + y\,i$ 6

$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{x}{2}$ 3

$z = \sqrt{3} + i$ **(ver nota 2)** 3

ou

Aplicar o Teorema de Pitágoras para concluir que $x = \sqrt{3}$ 3

$z = \sqrt{3} + i$ **(ver nota 2)** 3

ou

$z = 2\,cis\,\frac{\pi}{6}$ 4

$z = \sqrt{3} + i$ **(ver nota 2)** 2

Notas:

1. A cotação desta etapa deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:

Representação correcta 3

Triângulo $[OAB]$ com
- o vértice A no primeiro quadrante,
- o vértice B no quarto quadrante,
- A e B simétricos relativamente ao eixo real,

mas onde $\overline{AB}$ é manifestamente diferente de $\overline{OA}$ e de $\overline{OB}$, e não existe qualquer referência à igualdade dos lados 2

Triângulo $[OAB]$ com
- o vértice A no primeiro quadrante,
- o vértice B no quarto quadrante,

mas onde A e B não são simétricos relativamente ao eixo real, e não existe qualquer referência que evidencie a simetria 1

Outras situações 0

2. Se o examinando apresentar a parte real de z na forma de um valor aproximado, em vez do valor exacto $\sqrt{3}$, a cotação a atribuir a esta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

2.1. .... **14**

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$ 3

Concluir que a recta de equação $x = 1$ é assimptota do gráfico de f 3

Referir que, pelo facto de f ser contínua em todo o seu domínio, o seu gráfico não tem mais assimptotas verticais 3

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ 3

$\dfrac{f(x)}{x} = 1 + \ln(x-1)$ 2

$\lim\limits_{x \to +\infty} [1 + \ln(x-1)] = +\infty$ 1

Concluir que não existem assimptotas não verticais do gráfico de f 2

Nota:
Se o examinando tentar verificar a existência de assimptotas não verticais quando $x \to -\infty$, a cotação a atribuir a esta questão deve ser desvalorizada em 2 pontos. Se, em consequência desta desvalorização, a cotação resultar negativa, deve ser convertida em 0 (zero) pontos.

2.2. .... **14**

$f'(x) = 1 + \ln(x-1) + x \times \dfrac{1}{x-1}$ **(ver nota 1)** 4

Determinar $f'(2)$ 1

Determinar $f(2)$ 1

Escrever uma equação da recta r 2

Determinar a abcissa do ponto P 3

Determinar a área do trapézio **(ver nota 2)** 3

Notas:

1. Se o examinando evidenciar a intenção de determinar $f'(x)$, a cotação mínima a atribuir a esta etapa deverá ser de 1 ponto.

2. Se o examinando não apresentar o resultado na forma de fracção irredutível, a cotação a atribuir a esta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

3.1. .... **14**

Concluir que π é maximizante de d **(ver nota)**..3

Determinar a distância máxima $(152{,}1)$ 4

Concluir que 0 é minimizante de d **(ver nota)** 3

Determinar a distância mínima $(147{,}1)$.. 4

ou

$-1 \leq \cos x \leq 1$ 3

$0{,}0167 \geq -0{,}0167 \cos x \geq -0{,}0167$ 3

$1{,}0167 \geq 1 - 0{,}0167 \cos x \geq 0{,}9833$ 3

$152{,}1 \geq 149{,}6(1 - 0{,}0167 \cos x) \geq 147{,}1$ 3

Conclusão 2

Nota:
Não se exige que o examinando utilize a relação entre zeros/sinal da derivada e extremos/monotonia da função. O examinando pode obter o maximizante e o minimizante por observação directa da figura do enunciado.

3.2.1. .... **14**

Mostrar que, para $x = \pi$, se tem $t = \dfrac{T}{2}$ 8

Substituir x por π 1

Obter a igualdade $\dfrac{2\pi t}{T} = \pi$ 3

Mostrar que $\dfrac{2\pi t}{T} = \pi \Leftrightarrow t = \dfrac{T}{2}$ 4

Interpretar o resultado 6

A cotação a atribuir deve estar de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Interpretação correcta (exemplo: «O tempo que decorre entre a passagem da Terra pelo periélio e o instante em que a Terra atinge o ponto mais afastado da sua órbita, relativamente ao Sol, é metade do tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa.») 6

Interpretação mal redigida, mas onde existe evidência de o examinando ter compreendido a situação (exemplos: «Quando o $x = \pi$, demora-se metade dos dias a fazer uma volta completa de órbita.»; «Quando $x = \pi$ percorre-se metade da distância, demorando-se metade do tempo.») 3

Outras situações (exemplo: «O tempo para se chegar ao periélio é metade do tempo que demora a alcançar o Sol.») 0

3.2.2. .... **14**

Determinar o número de dias que decorrem entre 4 de Janeiro e 14 de Fevereiro (**ver nota 1**) 2

Escrever a equação $\frac{2\pi \times 41}{365{,}24} = x - 0{,}0167 \operatorname{sen} x$ 3

Resolver a equação 6

Explicação do método utilizado (**ver nota 2**).............................. 3

Valor de x (**ver nota 3**)..3

Determinar a distância pedida 3

Substituir x pelo valor encontrado, na expressão $149{,}6\ (1 - 0{,}0167 \cos x)$ 2

Resultado correctamente arredondado 1

Notas:

1. A cotação desta etapa deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:

Número de dias correcto (41) 2

Número de dias igual a 40 ou a 42 1

Outras situações 0

2. A cotação desta etapa deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:

Apresentação do gráfico da função definida por $x - 0{,}0167 \operatorname{sen} x$, com respeito pelo domínio desta função, $[0, 2\pi[$, e da recta de equação $y = \frac{2\pi \times 41}{365{,}24}$, bem como do ponto de intersecção e respectiva abcissa

(ou apresentação do gráfico da função definida por $x - 0{,}0167 \operatorname{sen} x - \frac{2\pi \times 41}{365{,}24}$ e respectivo zero) 3

Apresentação dos gráficos com ausência de alguns elementos (por exemplo, ausência da abcissa do ponto de intersecção) e/ou com algumas incorrecções (por exemplo, o gráfico da função não respeita o seu domínio) ....1 ou 2

Outras situações 0

3. A cotação a atribuir à solução da equação deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:

Solução no intervalo $[0{,}7162;\ 0{,}7163]$ 3

Solução não pertencente ao intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[0{,}71;\ 0{,}72]$ 2

Solução não pertencente ao intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[0{,}70;\ 0{,}73]$ 1

Outras situações 0

4. .... **14**

A demonstração envolve os seguintes pontos:

• referir a continuidade de g

• justificar correctamente que $g(0) < 0 \quad (g(0) = -f(1)$ e $f(1) > 0)$

• justificar correctamente que $g(1) > 0 \quad (g(1) = f(1)$ e $f(1) > 0)$

• evocar o Teorema de Bolzano para concluir que $\exists\, c \in]0, 1[\ : g(c) = 0$

• referir que $g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = f(c+1)$

A cotação a atribuir deve estar de acordo com o seguinte critério:

O examinando explicita os cinco pontos de uma forma clara e encadeada, demonstrando assim o pretendido 14

O examinando explicita os cinco pontos, mas não o faz de uma forma clara e encadeada 10

O examinando explicita quatro pontos 8

O examinando explicita três pontos 6

O examinando explicita dois pontos 4

O examinando explicita um ponto 2

5.1. .... **9**

Expressão que dá a probabilidade **(ver notas 1 e 2)**.. 8

Resultado na forma de fracção irredutível **(ver nota 3)**....................................... 1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva cotação a atribuir. As respostas apresentadas têm todas a forma de fracção. O examinando pode, no entanto, apresentar expressões equivalentes na forma de um produto de fracções.

<u>1.º caso</u>: Fracções com denominador ${}^{23}C_2$ e com numerador igual a:

$4 \times 9 + {}^{10}C_2$ (ou equivalente) 8
$10 \times 9 + 4 \times 9$ (ou equivalente) 6
4×9 (ou equivalente) 4
${}^{10}C_2$ (ou equivalente) 4
${}^{13}C_2 + {}^{10}C_2$ (ou equivalente) 4
Outras situações 2

<u>2.º caso</u>: Fracções com denominador 23×22 e numerador igual a:

$2 \times 4 \times 9 + {}^{10}A_2$ (ou equivalente) 8
$4 \times 9 + 10 \times 9$ (ou equivalente) 6
$4 \times 9 \times 2$ (ou equivalente) 4
${}^{10}A_2$ (ou equivalente) 4
4×9 (ou equivalente) 3
Outras situações 2

<u>3.º caso</u>: Fracções com denominador 23^2 e numerador igual a:

$2 \times 4 \times 9 + 10^2$ (ou equivalente) 2
Outras situações 0

<u>4.º caso</u>: Fracções com outros denominadores 0

2. Se o examinando indicar apenas o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

3. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

5.2. .... **9**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo:

Referir que existem 9 alunos com sete anos, dos quais 2 são rapazes 7

Concluir que a probabilidade pedida é $\frac{2}{9}$ 2

2.º Processo:

Referir que $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ **(ver nota 1)** 2

Concluir que $P(B|A) = \frac{\frac{2}{23}}{\frac{9}{23}}$ **(ver nota 2)** 6

Concluir que a probabilidade pedida é $\frac{2}{9}$ 1

Notas:

1. Se a fórmula apresentada pelo examinando estiver incorrecta, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos à totalidade da resposta a este item.

2. Se o examinando, desrespeitando a instrução do enunciado, não explicitar os valores de $P(B \cap A)$ e de $P(A)$, ou seja, se escrever $\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{2}{9}$, a cotação a atribuir a esta etapa deve ser desvalorizada em 3 pontos.

6. .... **14**

Explicar a rejeição das opções 1, 2 e 3 **(ver notas 1 e 2)** 12

Concluir que a opção 4 é a correcta **(ver nota 3)** 2

Notas:

1. Para cada uma das três opções que o examinando deve rejeitar, a cotação a atribuir deve estar de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

O examinando identifica a afirmação falsa, explica correctamente a razão pela qual a afirmação é falsa, utilizando sempre uma linguagem matematicamente correcta 4

O examinando identifica a afirmação falsa, explica correctamente a razão pela qual a afirmação é falsa, mas nem sempre utiliza uma linguagem matematicamente correcta 3

O examinando identifica a afirmação falsa, mas não explica correctamente a razão pela qual a afirmação é falsa 2

O examinando não identifica a afirmação falsa 0

2. Para cada uma das três opções, indica-se o mínimo que se aceita como justificação correcta da falsidade da afirmação em causa.

Opção 1: A afirmação $P(X \cup Y) < 1$ é falsa porque, como todos os alunos têm idade superior ou igual a 16 anos, $X \cup Y$ é um acontecimento certo.

Opção 2: A afirmação $P(X \cup Y) > P(X)$ é falsa porque, como todos os números múltiplos de 4 são pares, $X \cup Y = X$.

Opção 3: A afirmação $P(X \cap Y) > 0$ é falsa porque, como não existem raparigas com 18 anos, $X \cap Y = \emptyset$.

3. A cotação relativa a esta etapa só deve ser atribuída se tiverem sido cotadas, com pelo menos 2 pontos, cada uma das três rejeições (da etapa anterior) **ou** se o examinando justificar convenientemente porque é que as três afirmações são verdadeiras, na opção 4.