

Teste Intermédio

## Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 10.12.2008

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

**Na sua folha de respostas, indique claramente a versão do teste.  
A ausência dessa indicação implica a classificação das respostas  
aos itens de escolha múltipla com zero pontos.**

## Formulário

### Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha r$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

### Áreas de figuras planas

Losango:  $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio:  $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular:  $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Sector circular:  $\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

### Áreas de superfícies

Área lateral de um cone:  $\pi r g$   
( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

Área de uma superfície esférica:  $4 \pi r^2$   
( $r$  – raio)

### Volumes

Pirâmide:  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone:  $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera:  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ( $r$  – raio)

### Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos } a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$

$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$

### Complexos

$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}$ ,  $k \in \{0, \dots, n-1\}$

### Probabilidades

$\mu = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \dots + (x_n - \mu)^2 p_n}$

Se  $X$  é  $N(\mu, \sigma)$ , então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

### Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$  ( $n \in \mathbb{R}$ )

$(\text{sen } u)' = u' \cdot \cos u$

$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$  ( $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ )

### Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$  ( $p \in \mathbb{R}$ )

## Grupo I

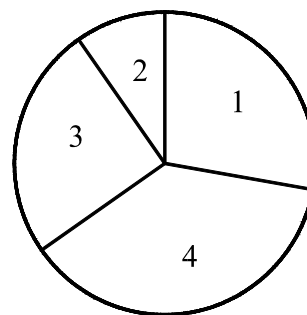
- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**
- Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. A soma dos dois primeiros elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 13. Quantos elementos dessa linha são menores do que 70?

(A) 2                      (B) 4                      (C) 6                      (D) 8

2. Na figura está representado um círculo dividido em quatro sectores circulares diferentes, numerados de 1 a 4.

Estão disponíveis **cinco** cores para pintar este círculo.



Pretende-se que sejam respeitadas as seguintes condições:

- todos os sectores devem ser pintados;
- cada sector é pintado com uma única cor;
- sectores com um raio em comum não podem ficar pintados com a mesma cor;
- o círculo deve ficar pintado com **duas** ou com **quatro** cores.

De quantas maneiras diferentes pode o círculo ficar pintado?

(A) 140                      (B) 230                      (C) 310                      (D) 390

- 3.** Seja  $\Omega$  o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.  
Sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos ( $A \subset \Omega$  e  $B \subset \Omega$ )  
Sabe-se que  $P(A) = 0,5$  e que  $P(B) = 0,7$   
Podemos então garantir que ...

- (A)  $A$  e  $B$  são acontecimentos contrários  
(B)  $A$  e  $B$  são acontecimentos compatíveis  
(C)  $A$  está contido em  $B$   
(D) o acontecimento  $A \cup B$  é certo

- 4.** A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória  $X$  é

$x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$a$	$b$	0,5

( $a$  e  $b$  designam números reais)

O valor médio desta variável aleatória é 1,4  
Qual é o valor de  $a$  ?

- (A) 0,1                      (B) 0,2                      (C) 0,3                      (D) 0,5

- 5.** O diâmetro, em milímetros, dos parafusos produzidos por uma certa máquina é uma variável aleatória  $X$  com distribuição normal, de valor médio 9.  
Qualquer parafuso produzido por essa máquina passa por um controle de qualidade. Ao passar por esse controle, o parafuso é aprovado se o seu diâmetro estiver compreendido entre 8,7 e 9,3 milímetros. Caso contrário, é rejeitado.  
Sabe-se que 99,73% dos parafusos são aprovados.  
Qual é o desvio padrão da variável aleatória  $X$  ?

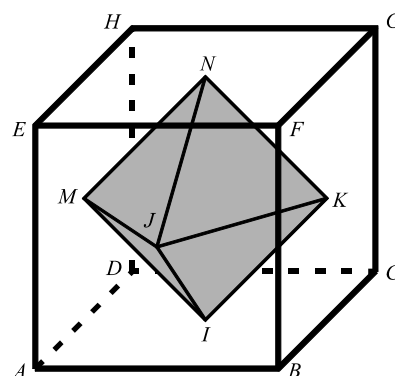
- (A) 0,1                      (B) 0,3                      (C) 0,6                      (D) 0,9

## Grupo II

Nas respostas a itens deste grupo apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Na figura estão representados dois poliedros, o cubo  $[ABCDEFGH]$  e o octaedro  $[IJKLMN]$  (o vértice  $L$  do octaedro não está visível).



Cada vértice do octaedro pertence a uma face do cubo.

- 1.1. Considere todos os conjuntos que são constituídos por cinco dos catorze vértices dos dois poliedros (como, por exemplo,  $\{A, B, C, K, L\}$ ).

1.1.1. Quantos desses conjuntos são constituídos por três vértices do cubo e dois vértices do octaedro?

1.1.2. Quantos desses conjuntos são constituídos por cinco vértices do mesmo poliedro?

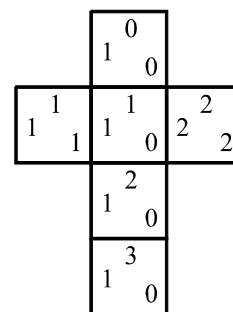
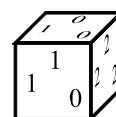
- 1.2. Escolhem-se ao acaso cinco dos catorze vértices dos dois poliedros.

Qual é a probabilidade de os cinco vértices escolhidos pertencerem todos à mesma face do cubo? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2. Na figura está representado um dado equilibrado, bem como a respectiva planificação.

Conforme se pode observar na figura, existem três números em cada face.

Lança-se este dado **uma só vez** e observam-se os números da face que fica voltada para cima. Diz-se então que saíram esses três números.



- 2.1. Seja  $X$  a variável aleatória «**produto dos três números saídos**». Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória  $X$ . Apresente as probabilidades na forma de fracção.

- 2.2. Seja  $R$  o acontecimento «os números saídos são todos iguais». Seja  $S$  o acontecimento «a **soma dos números saídos é igual a 3**». Os acontecimentos  $R$  e  $S$  são independentes? Justifique.

### 3.

**3.1.** Seja  $\Omega$  o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos ( $A \subset \Omega$  e  $B \subset \Omega$ ) de probabilidade não nula.

Considere que  $\overline{B}$  designa o acontecimento contrário de  $B$  e que  $P(A|B)$  e  $P(B|A)$  designam probabilidades condicionadas.

Mostre que  $P(A|B) = P(\overline{B}) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A)$

**3.2.** Relativamente a uma turma do 12º ano, sabe-se que:

- 60% dos alunos da turma praticam desporto;
- 40% dos alunos da turma são raparigas;
- metade dos praticantes de desporto são raparigas.

Escolhendo ao acaso um aluno da turma, qual é a probabilidade de ser praticante de desporto, sabendo que é uma rapariga?

Apresente o resultado na forma de percentagem.

**Nota:**

Se desejar, pode utilizar a fórmula da alínea anterior na resolução deste problema. Nesse caso, comece por explicitar o significado dos acontecimentos  $A$  e  $B$ , no contexto do problema.

Também pode resolver o problema através de um diagrama, de uma tabela, ou utilizando qualquer outro processo.

**4.** Um saco contém bolas brancas e bolas pretas, pelo menos uma de cada cor, num total de cinco.

Tiram-se, simultaneamente e ao acaso, três bolas do saco.

Seja  $X$  a variável aleatória «*número de bolas brancas retiradas*».

Sabendo que a variável  $X$  toma exclusivamente os valores 2 e 3, indique o número de bolas brancas e o número de bolas pretas que estão inicialmente no saco.

Numa pequena composição, explique o seu raciocínio.

**FIM**

## COTAÇÕES

**Grupo I .....(5 × 10 pontos) .....50 pontos**

**Grupo II .....150 pontos**

**1. .... 50 pontos**

1.1. .... 30 pontos

1.1.1. .... 15 pontos

1.1.2. .... 15 pontos

1.2. .... 20 pontos

**2. .... 40 pontos**

2.1. .... 20 pontos

2.2. .... 20 pontos

**3. .... 40 pontos**

3.1. .... 20 pontos

3.2. .... 20 pontos

**4. .... 20 pontos**

**TOTAL ..... 200 pontos**

Teste Intermédio

## Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 10.12.2008

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

### COTAÇÕES

<b>GRUPO I</b> .....	(5 × 10 pontos) .....	<b>50 pontos</b>
<b>GRUPO II</b> .....		<b>150 pontos</b>
<b>1.</b> .....		<b>50 pontos</b>
<b>1.1.</b> .....		<b>30 pontos</b>
<b>1.1.1.</b> .....		<b>15 pontos</b>
<b>1.1.2.</b> .....		<b>15 pontos</b>
<b>1.2.</b> .....		<b>20 pontos</b>
<b>2.</b> .....		<b>40 pontos</b>
<b>2.1.</b> .....		<b>20 pontos</b>
<b>2.2.</b> .....		<b>20 pontos</b>
<b>3.</b> .....		<b>40 pontos</b>
<b>3.1.</b> .....		<b>20 pontos</b>
<b>3.2.</b> .....		<b>20 pontos</b>
<b>4.</b> .....		<b>20 pontos</b>
	<b>TOTAL</b> .....	<b>200 pontos</b>



## CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO DO TESTE

As classificações a atribuir às respostas são expressas em números inteiros não negativos e resultam da aplicação dos critérios gerais e específicos de classificação.

As respostas que se revelem ilegíveis são classificadas com zero pontos.

No caso de existir um engano na identificação do item, ou no caso de esta ser omitida, a resposta é classificada se, pela resolução apresentada, for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

No caso de existirem várias respostas ao mesmo item, sem eliminação inequívoca da(s) que não deve(m) ser considerada(s), é classificada a resposta que se apresenta em primeiro lugar.

A ausência de indicação inequívoca da versão (Versão 1 ou Versão 2) implica a classificação com zero pontos de todas as respostas aos itens de escolha múltipla.

### Itens de resposta fechada de escolha múltipla

A cotação total do item só é atribuída às respostas que apresentam de forma inequívoca a única alternativa correcta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que é assinalada:

- uma alternativa incorrecta;
- mais do que uma alternativa.

Não há lugar a classificações intermédias..

### Itens de resposta aberta

Os critérios de classificação destes itens apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

Nos itens de resposta aberta extensa orientada, com cotação igual ou superior a quinze pontos e que impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa.

A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização é cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho a seguir descritos:

Nível	Descritor
3	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
2	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
1	Composição sem estruturação aparente, com a presença de erros graves de sintaxe, pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No quadro seguinte apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente:

Situação	Classificação
1. Classificação de um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A cotação indicada para cada etapa é a classificação máxima que lhe é atribuível.  A classificação da resposta resulta da soma das classificações das diferentes etapas, à qual se subtrai eventualmente um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e 19.
2. Classificação de uma etapa dividida em passos.	A cotação indicada para cada passo é a classificação máxima que lhe é atribuível.  A classificação da etapa resulta da soma das classificações dos diferentes passos.
3. Classificação de um item ou de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação correspondente subtrai-se, eventualmente, um ponto, de acordo com o previsto na situação 19.
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correcto. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante a distribuição da cotação do item pelas etapas percorridas pelo aluno. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Apresentação apenas do resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
6. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [por exemplo, «usando métodos analíticos»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é classificada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é classificada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa.	Se a resolução apresentada permitir perceber, inequivocamente, que a etapa foi percorrida, a mesma é classificada com a cotação total para ela prevista.
9. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução não diminuir, é subtraído um ponto à classificação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a classificação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
10. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo.	É subtraído um ponto à classificação da etapa em que o erro ocorre.
11. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A classificação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.

Situação	Classificação
12. Ocorrência de um erro na resolução de uma etapa.	<p>A etapa é classificada de acordo com o erro cometido.</p> <p>As etapas subsequentes são classificadas de acordo com os efeitos do erro cometido:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são classificadas de acordo com os critérios específicos de classificação;</li> <li>- se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a classificação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.</li> </ul>
13. Resolução incompleta de uma etapa.	Se, à resolução da etapa, faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à classificação da etapa; caso contrário, a classificação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
14. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorrecto.	É subtraído um ponto à classificação total da resposta.
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à classificação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [por exemplo, «15» em vez de «15 metros».]	A etapa relativa à apresentação do resultado final é classificada com a cotação total para ela prevista.
17. Apresentação do resultado final com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	É subtraído um ponto à classificação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação do resultado final incorrectamente arredondado.	É subtraído um ponto à classificação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
19. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	<p>É subtraído um ponto à classificação total da resposta, excepto:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- se as incorrecções ocorrerem apenas em etapas já classificadas com zero pontos;</li> <li>- nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.</li> </ul>

## CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

### Grupo I

1. a 5. ....(5 × 10)..... 50

As respostas correctas são as seguintes:

Itens	1	2	3	4	5
Respostas	C	A	B	A	A

### Grupo II

1.1.1. .... 15

Expressão que dá o valor pedido (ver notas 1, 2 e 3) ..... 14

Resultado final (ver nota 4) ..... 1

#### Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do aluno, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva classificação a atribuir:

${}^8C_3 \times {}^6C_2$  (ou equivalente) ..... 14

${}^8A_3 \times {}^6A_2$  (ou equivalente) ..... 5

${}^8C_3 + {}^6C_2$  (ou equivalente) ..... 5

${}^8A_3 + {}^6A_2$  (ou equivalente) ..... 2

${}^8C_3$  (ou equivalente) ..... 2

${}^6C_2$  (ou equivalente) ..... 2

2. Caso a resposta do aluno não esteja prevista na nota 1, mas apenas difira de uma situação prevista devido a um erro motivado, inequivocamente, por distração, a classificação a atribuir deve ser a prevista, subtraída de um ponto.
3. Caso a resposta do aluno não esteja prevista nas notas 1 e 2, mas corresponda a um desempenho que se enquadre entre duas situações previstas na nota 1, a classificação a atribuir deve ser a que está indicada para a situação que, das duas, tem menor pontuação. Se a resposta do aluno revelar um desempenho inferior à última situação prevista na nota 1, a classificação a atribuir deverá ser de zero pontos.
4. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se o resultado estiver de acordo com a expressão escrita pelo aluno e se esta expressão não tiver sido classificada com zero pontos.

**1.1.2. .... 15**

Expressão que dá o valor pedido (ver **notas 1, 2 e 3**) ..... 14

Resultado final (ver **nota 4**) ..... 1

**Notas:**

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do aluno, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva classificação a atribuir:

${}^8C_5 + {}^6C_5$  (ou equivalente) ..... 14

${}^8A_5 + {}^6A_5$  (ou equivalente) ..... 5

${}^8C_5 \times {}^6C_5$  (ou equivalente) ..... 5

${}^8A_5 \times {}^6A_5$  (ou equivalente) ..... 2

${}^8C_5$  (ou equivalente) ..... 2

${}^6C_5$  (ou equivalente) ..... 2

2. Caso a resposta do aluno não esteja prevista na nota 1, mas apenas difira de uma situação prevista devido a um erro motivado, inequivocamente, por distração, a classificação a atribuir deve ser a prevista, subtraída de um ponto.

3. Caso a resposta do aluno não esteja prevista nas notas 1 e 2, mas corresponda a um desempenho que se enquadre entre duas situações previstas na nota 1, a classificação a atribuir deve ser a que está indicada para a situação que, das duas, tem menor pontuação. Se a resposta do aluno revelar um desempenho inferior à última situação prevista na nota 1, a classificação a atribuir deverá ser de zero pontos.

4. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se o resultado estiver de acordo com a expressão escrita pelo aluno e se esta expressão não tiver sido classificada com zero pontos.

1.2. .... 20

Expressão que dá o valor pedido (ver **notas 1, 2 e 3**) ..... 18

Resultado final (ver **nota 4**) ..... 2

**Notas:**

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do aluno, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva classificação a atribuir:

$\frac{6}{{}^{14}C_5}$  (ou equivalente) ..... 18

$\frac{6}{{}^{14}A_5}$  (ou equivalente) ..... 8

Outras fracções próprias com denominador  ${}^{14}C_5$   
ou com numerador 6 ..... 4

2. Caso a resposta do aluno não esteja prevista na nota 1, mas apenas difira de uma situação prevista devido a um erro motivado, inequivocamente, por distração, a classificação a atribuir deve ser a prevista, subtraída de um ponto.
3. Caso a resposta do aluno não esteja prevista nas notas 1 e 2, mas corresponda a um desempenho que se enquadre entre duas situações previstas na nota 1, a classificação a atribuir deve ser a que está indicada para a situação que, das duas, tem menor pontuação. Se a resposta do aluno revelar um desempenho inferior à última situação prevista na nota 1, a classificação a atribuir deverá ser de zero pontos.
4. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se o resultado estiver de acordo com a expressão escrita pelo aluno e se esta expressão não tiver sido classificada com zero pontos. Se a resposta final estiver de acordo com a expressão escrita pelo aluno, mas não respeitar a forma pedida, a classificação a atribuir à resposta deve ser desvalorizada em 1 ponto.

**2.1. .... 20**

Valores da variável (ver **nota 1**)..... 6  
 Probabilidades (ver **nota 2**) ..... 12  
 Apresentação da tabela .....2

**Notas:**

1. Se os valores da variável não estiverem todos correctos, mas o erro cometido for, inequivocamente, um erro de distração, a classificação a atribuir deve ser de 5 pontos. Em qualquer outra situação, a classificação a atribuir deve ser de 0 pontos.
2. Cada valor correcto apresentado na forma de fracção vale 4 pontos.  
 Cada valor correcto não apresentado na forma de fracção vale 3 pontos.  
 Cada valor incorrecto vale zero pontos.

**2.2. .... 20**

Valor de  $P(R)$  ..... 3  
 Valor de  $P(S)$  ..... 3  
 Valor de  $P(R) \times P(S)$  ..... 2  
 Valor de  $P(R \cap S)$  ..... 10  
 Conclusão .....2

**ou**

Valor de  $P(R)$  ..... 3  
 Valor de  $P(R|S)$  (**ver nota**) ..... 15  
 Conclusão .....2

**ou**

Valor de  $P(S)$  ..... 3  
 Valor de  $P(S|R)$  (**ver nota**) ..... 15  
 Conclusão .....2

**Nota:**

O aluno pode limitar-se a indicar o valor da probabilidade condicionada, como resultado de ter interpretado o seu significado, no contexto da situação descrita, ou pode aplicar a fórmula que relaciona a probabilidade condicionada com a probabilidade da intersecção. Neste último caso, os 15 pontos previstos para esta etapa devem ser distribuídos da seguinte forma:

Valor de  $P(R \cap S)$  ..... 10  
 Valor do denominador ( $P(R)$  ou  $P(S)$ ) ..... 3  
 Quociente ..... 2

**3.1. .... 20**

O aluno deverá utilizar as seguintes propriedades:

- relação da probabilidade de um acontecimento com a do seu contrário
- relação da probabilidade da intersecção com a probabilidade condicionada
- propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

A classificação a atribuir deve estar de acordo com o seguinte critério:

O aluno mostra correctamente o pretendido .....	20
O aluno utiliza correctamente as três propriedades, mas não mostra correctamente o pretendido .....	15
O aluno utiliza correctamente duas propriedades .....	10
O aluno utiliza correctamente uma propriedade .....	5
Outras situações .....	0

**3.2. .... 20**

**1.º Caso:** o aluno utiliza a fórmula da alínea anterior

Identificar correctamente a informação «metade dos praticantes de desporto são raparigas» com  $P(A|B)$  ou  $P(B|A)$ , conforme o significado atribuído pelo aluno aos acontecimentos  $A$  e  $B$  .....3

Identificar correctamente o pedido (*probabilidade de ser praticante de desporto, sabendo que é uma rapariga*) com  $P(A|B)$  ou  $P(B|A)$ , conforme o significado atribuído pelo aluno aos acontecimentos  $A$  e  $B$  .....3

Substituir as probabilidades, na fórmula da alínea anterior .....(3+3+3) ..... 9

Obter a probabilidade pedida (através da resolução da equação obtida) ..... 4

Apresentar a probabilidade pedida na forma de percentagem ..... 1

**2.º Caso:** o aluno não utiliza a fórmula da alínea anterior (utiliza uma tabela, um diagrama ou qualquer outro processo)

Utilizar correctamente a informação «metade dos praticantes de desporto são raparigas» para calcular a probabilidade de «ser rapariga e praticar desporto»..... 8

Identificar o pedido (*probabilidade de ser praticante de desporto, sabendo que é uma rapariga*) com  $P(\text{praticar desporto} | \text{é rapariga})$  ..... 3

Obter a probabilidade pedida ..... 8

Apresentar a probabilidade pedida na forma de percentagem ..... 1



Apresentam-se a seguir quatro cenários de resposta.

Cenário 1:

*O enunciado, ao mencionar a existência de pelo menos uma bola de cada cor, garante a existência de pelo menos uma bola preta no saco. Por outro lado, se houvesse mais do que uma bola preta no saco, poderia acontecer que, no conjunto das três bolas retiradas, existisse mais do que uma bola preta, pelo que haveria, nesse conjunto de três bolas, menos de duas bolas brancas, situação em que a variável aleatória  $X$  tomaria um valor menor do que 2, contrariando o que é referido no enunciado. Portanto, o saco contém uma bola preta e quatro bolas brancas.*

Cenário 2:

*O enunciado, ao mencionar a existência de pelo menos uma bola de cada cor, garante a existência de pelo menos uma bola preta no saco. Por outro lado, como a variável aleatória  $X$  pode tomar o valor 3, existem pelo menos três bolas brancas no saco. Temos, assim, duas hipóteses: três brancas e duas pretas ou quatro brancas e uma preta. Porém, se existissem três brancas e duas pretas, poderia acontecer que, no conjunto das três bolas retiradas do saco, existissem duas pretas e uma branca, situação em que a variável aleatória  $X$  tomaria o valor 1, contrariando o que é referido no enunciado sobre os valores que  $X$  pode tomar. Portanto, o saco contém uma bola preta e quatro bolas brancas.*

Cenário 3:

*Como o saco contém cinco bolas, brancas e pretas, e há pelo menos uma bola de cada cor, temos as hipóteses seguintes: quatro pretas e uma branca, três pretas e duas brancas, duas pretas e três brancas, uma preta e quatro brancas. Porém, as duas primeiras hipóteses contrariam o facto de  $X$  poder tomar o valor 3. Na terceira hipótese poderia acontecer que, no conjunto das três bolas retiradas do saco, existisse apenas uma branca, contrariando o facto de  $X$  não poder tomar o valor 1. Portanto, o saco contém uma bola preta e quatro bolas brancas.*

Cenário 4:

*De acordo com o enunciado, a variável aleatória  $X$  só toma os valores 2 e 3. Portanto, ao retirarmos três bolas do saco, só há duas hipóteses: ou as bolas são todas brancas, ou são duas brancas e uma preta. Uma vez que podemos obter uma bola preta e nunca obtemos mais do que uma bola preta, só há uma bola preta no saco. Portanto, o saco contém uma bola preta e quatro bolas brancas.*

Qualquer que seja o cenário de resposta, a composição deverá contemplar os seguintes pontos:

- um argumento que evidencie o facto de o saco conter pelo menos uma bola preta (poderá ser uma simples referência, já que tal é garantido no enunciado);
- um argumento que mostre que não pode haver mais do que uma bola preta no saco;
- a conclusão, a partir dos pontos anteriores, de que o saco contém uma bola preta e quatro bolas brancas.

Na tabela seguinte indica-se como deverá ser classificada a composição. Os níveis 1, 2 e 3 dizem respeito ao desempenho na comunicação em língua portuguesa, de acordo com o disposto nos critérios gerais.

	Nível 1	Nível 2	Nível 3
A composição contempla os três pontos	18	19	20
A composição contempla apenas os dois primeiros pontos	15	16	17
A composição contempla apenas o segundo ponto	12	13	14
A composição contempla apenas o primeiro ponto	1	2	3

# TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

## RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

### Grupo I

1. Dado que a soma dos dois primeiros elementos da linha é igual a 13 e uma vez que, no Triângulo de Pascal, o primeiro elemento de qualquer linha é igual a 1, podemos concluir que o segundo elemento da linha em causa é igual a 12.

Trata-se, portanto, da linha que contém os elementos da forma  ${}^{12}C_k$ .

O terceiro elemento dessa linha é  ${}^{12}C_2$ , ou seja, 66, que é menor do que 70.

O quarto elemento da linha é  ${}^{12}C_3$ , ou seja, 220, que já é maior do que 70.

Portanto, só os três primeiros e os três últimos elementos dessa linha são menores do que 70.

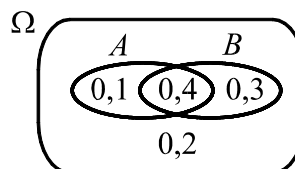
Resposta **C**

2.  $5 \times 4 \times 1 \times 1 + 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 20 + 120 = 140$

Resposta **A**

3. No diagrama apresentado ao lado, tem-se, de acordo com o enunciado,  $P(A) = 0,5$  e  $P(B) = 0,7$ .

Este diagrama permite excluir as alternativas A, C e D, pelo que a alternativa correcta é a B.



Outro processo:

Se  $A$  e  $B$  fossem acontecimentos incompatíveis, ter-se-ia  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,5 + 0,7 = 1,2$ , o que é absurdo, dado que a probabilidade de qualquer acontecimento nunca é maior do que 1.

Portanto,  $A$  e  $B$  são acontecimentos compatíveis.

Resposta **B**

4. Como o valor médio da variável aleatória  $X$  é 1,4 tem-se  $0 \times a + 1 \times b + 2 \times 0,5 = 1,4$  pelo que  $b = 0,4$ .

Vem então  $a + 0,4 + 0,5 = 1$ , donde  $a = 0,1$

Resposta **A**

5. Sendo  $X$  uma variável aleatória com distribuição normal, de valor médio  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ , tem-se  $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 99,73\%$

Vem então  $8,7 = 9 - 3\sigma$  e  $9,3 = 9 + 3\sigma$ , pelo que  $\sigma = 0,1$

Resposta **A**

## Grupo II

1.1.1.  ${}^8C_3 \times {}^6C_2 = 840$

1.1.2.  ${}^8C_5 + {}^6C_5 = 62$

1.2. A probabilidade pedida é  $\frac{6}{{}^{14}C_5} = \frac{3}{1001}$

2.1.

$x_i$	0	1	8
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2.2. Os acontecimentos  $R$  e  $S$  são independentes se, e só se,  $P(R \cap S) = P(R) \times P(S)$   
Como  $R \cap S$  é o acontecimento «sair 1, 1, 1», tem-se  $P(R \cap S) = \frac{1}{6}$   
Dado que  $P(R) = \frac{2}{6}$  e  $P(S) = \frac{2}{6}$ , tem-se  $P(R \cap S) \neq P(R) \times P(S)$ .  
Portanto, os acontecimentos  $R$  e  $S$  não são independentes.

3.1.  $P(A|B) - P(\bar{B}) \times P(A|B) = P(A|B) [1 - P(\bar{B})] =$   
 $= P(A|B) \times P(B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$

3.2. Sejam:

$A$  : «o aluno escolhido é rapariga»;       $B$  : «o aluno escolhido pratica desporto»

Como 60% dos alunos da turma praticam desporto, tem-se  $P(B) = 0,6$

Como 40% dos alunos da turma são raparigas, tem-se  $P(A) = 0,4$

Como metade dos praticantes de desporto são raparigas, tem-se  $P(A|B) = 0,5$

Substituindo na fórmula da alínea anterior, vem:

$$0,5 - 0,4 \times 0,5 = 0,4 \times P(B|A)$$

Portanto,  $P(B|A) = 0,75$ . A probabilidade pedida é 75%.

4. Como a variável aleatória  $X$  pode tomar o valor 3, existem, pelo menos, três bolas brancas no saco, pelo que, no máximo, existem duas bolas pretas no saco.

Por outro lado, é dito no enunciado que, no saco, há pelo menos uma bola de cada cor, pelo que há, pelo menos, uma bola preta no saco.

Se existissem, no saco, duas bolas pretas, poderia acontecer que, ao tirar três bolas do saco, saíssem duas bolas pretas e uma branca. Nesse caso, a variável aleatória  $X$ , *número de bolas brancas retiradas*, tomaria o valor 1.

Como  $X$  só toma os valores 2 e 3, não pode haver, no saco, duas bolas pretas.

Portanto, no saco, há uma bola preta e quatro bolas brancas.