Prova Escrita de Matemática A

12.º ano de Escolaridade

Prova 635/2.ª Fase 11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos

2008

VERSÃO 1

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova.

A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente elaboradas a lápis, sendo, a seguir, passadas a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e/ou dos itens, bem como as respectivas respostas.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de **escolha múltipla**, escreva, na folha de respostas,

- o **número** do item;
- a **letra identificativa** da alternativa correcta.

Não apresente cálculos, nem justificações.

Nos itens de resposta aberta com cotação igual ou superior a 15 pontos e que impliquem a produção de um texto, o domínio da comunicação escrita em língua portuguesa representa cerca de 10% da cotação.

As cotações dos itens encontram-se na página 11.

A prova inclui um Formulário na página 4.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro × Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ (α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r *– raio da base;* g *– geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r *– raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\,\pi\, r^3$
(r *– raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Probabilidades

$\mu = x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \cdots + (x_n - \mu)^2 p_n}$

Se X é N(μ, σ), então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -\, u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

- Os oito itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Ao disputar um torneio de tiro ao alvo, o João tem de atirar sobre o alvo quatro vezes. Sabe-se que, em cada tiro, a probabilidade de o João acertar no alvo é 0,8.

Qual é a probabilidade de o João acertar sempre no alvo, nas quatro vezes em que tem de atirar?

(A) $0{,}0016$ **(B)** $0{,}0064$ **(C)** $0{,}0819$ **(D)** $0{,}4096$

2. Uma caixa A contém duas bolas verdes e uma bola amarela. Outra caixa B contém uma bola verde e três bolas amarelas. As bolas colocadas nas caixas A e B são indistinguíveis ao tacto.
Lança-se um dado cúbico perfeito, com as faces numeradas de 1 a 6. Se sair o número 5, tira-se uma bola da caixa A; caso contrário, tira-se uma bola da caixa B.

Qual é a probabilidade de a bola retirada ser verde, sabendo que saiu o número 5 no lançamento do dado?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{3}{7}$ **(D)** $\frac{2}{3}$

3. Uma linha do Triângulo de Pascal tem quinze elementos.

Quantos elementos dessa linha são inferiores a 100?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 8

4. Sabe-se que o ponto $P(1,3)$ pertence ao gráfico da função $f(x) = 2^{ax} - 1,\ a \in \mathbb{R}$.

Qual é o valor de a?

(A) 2 **(B)** 1 **(C)** 0 **(D)** -2

5. Na figura 1 está representada parte do gráfico de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$ e contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. As rectas de equações $x = -2$ e $y = 1$ são as únicas assimptotas do gráfico de g.

Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} g(x_n) = +\infty$.

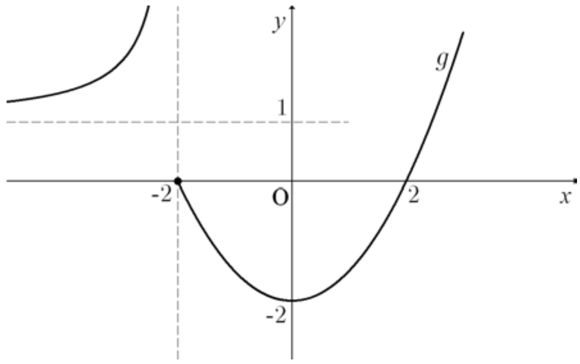


Fig. 1

Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sucessão (x_n) ?

(A) $-2+\dfrac{2}{n}$ **(B)** $-2-\dfrac{1}{n}$ **(C)** $1+\dfrac{1}{n}$ **(D)** $1-\dfrac{1}{n}$

6. Na figura 2 está representada parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sendo $y = -1$ a única assimptota do seu gráfico.

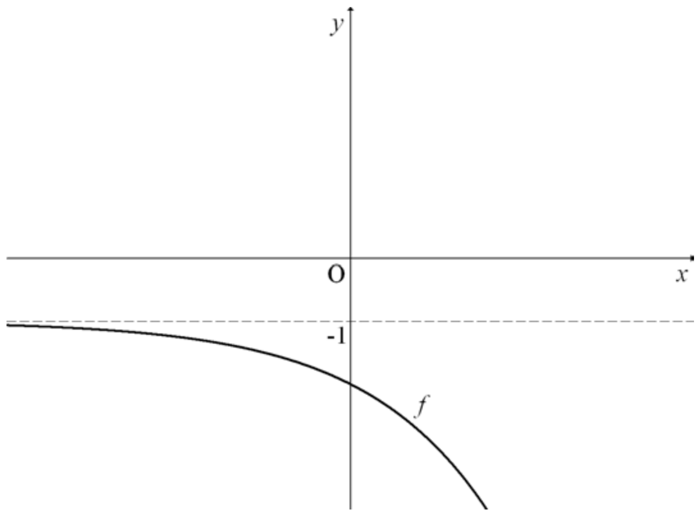


Fig. 2

Qual é o valor do $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{f(x)}$?

(A) $-\infty$ **(B)** -3 **(C)** -1 **(D)** 3

7. Seja z um número complexo de argumento $\frac{\pi}{6}$.

Qual dos seguintes valores é um argumento de $(-z)$?

(A) $-\frac{\pi}{6}$ **(B)** $\frac{5}{6}\pi$ **(C)** π **(D)** $\frac{7}{6}\pi$

8. Considere a figura 3, representada no plano complexo.

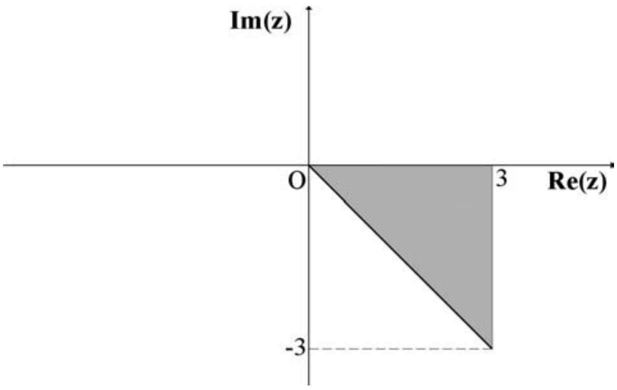


Fig. 3

Qual é a condição, em $\mathbb{C}$, que define a região sombreada da figura, incluindo a fronteira?

(A) $\text{Re}(z) \leq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$

(B) $\text{Re}(z) \leq 3 \wedge 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$

(C) $\text{Im}(z) \leq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$

(D) $\text{Re}(z) \geq 3 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq 0$

GRUPO II

Na resposta a itens deste grupo, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - i$ (i designa a unidade imaginária).

1.1. **Sem recorrer à calculadora**, determine o valor de $\dfrac{2z_1 - i^{18} - 3}{1 - 2i}$.

Apresente o resultado na forma algébrica.

1.2. Considere z_1 uma das raízes quartas de um certo número complexo z.

Determine uma outra raiz quarta de z, cuja imagem geométrica é um ponto pertencente ao 3.º quadrante.

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

2.

2.1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Prove que: $$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A \cup B)$$

(P designa a probabilidade, $\overline{A}$ designa o acontecimento contrário de A e $\overline{B}$ designa o acontecimento contrário de B.)

2.2. Numa determinada cidade, das 160 raparigas que fizeram o exame nacional de Matemática, 65% tiveram classificação positiva, e, dos 120 rapazes que fizeram o mesmo exame, 60% também tiveram classificação positiva.
Escolhendo, ao acaso, um dos estudantes que realizaram o exame, qual é a probabilidade de o estudante escolhido não ser rapaz ou não ter tido classificação positiva?

Apresente o resultado em forma de dízima, com aproximação às centésimas.

Nota:

Se o desejar, utilize a igualdade referida em **2.1.** Neste caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B, no contexto da situação apresentada; no entanto, pode optar por resolver o problema por outro processo.

3. Numa caixa temos três fichas com o número 1 e quatro fichas com o número 2, indistinguíveis ao tacto.
Retiram-se, ao acaso e de uma só vez, duas fichas.
Seja X a variável aleatória: *«a soma dos números inscritos nas duas fichas»*.

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X.

Indique, justificando, o valor mais provável da variável X.

Apresente as probabilidades na forma de fracção irredutível.

4. Considere a função f, de domínio $\left]-\dfrac{1}{2}, \ +\infty\right[$, definida por $f(x) = \dfrac{\ln(2x+1)}{2x+1}$, e a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x - 2$ $\quad$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).

Indique as soluções inteiras da inequação $f(x) > g(x)$, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**.

Para resolver esta inequação, percorra os seguintes passos:

- visualize as curvas representativas dos gráficos das duas funções;
- reproduza, na sua folha de respostas, o referencial e as curvas visualizadas na calculadora;
- assinale, ainda, os pontos A e B, de intersecção dos gráficos das duas funções, indicando as suas coordenadas, com aproximação às décimas.

5. Na figura 4 estão representadas duas rectas paralelas, a recta AB (em que A e B são pontos fixos) e a recta s.
O ponto S é um ponto móvel, deslocando-se ao longo de toda a recta s.
Para cada posição do ponto S, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo BAS e seja $a(x)$ a área do triângulo $[ABS]$.

Apenas um dos seguintes gráficos pode representar a função a.

Numa composição, explique por que razão cada um dos outros três gráficos não pode representar a função a.

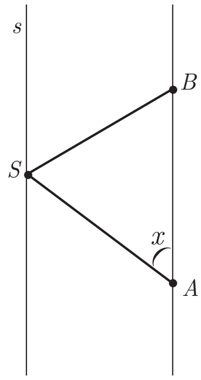


Fig. 4

Gráfico 1

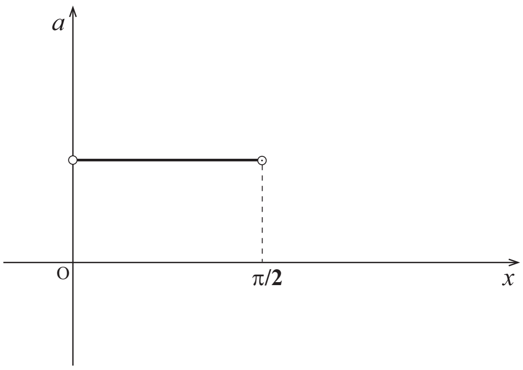


Gráfico 2

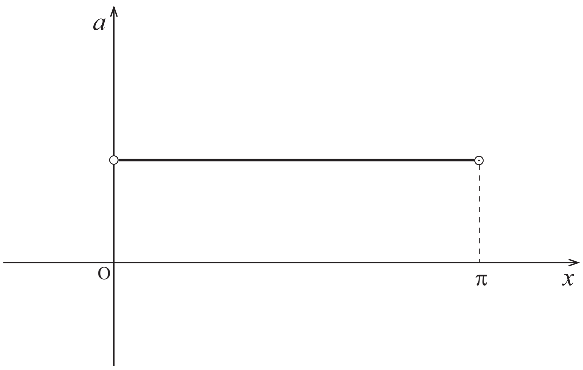


Gráfico 3

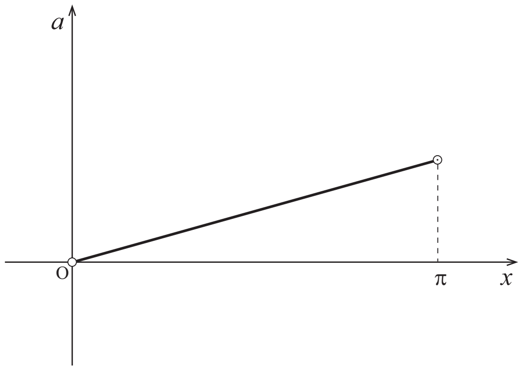
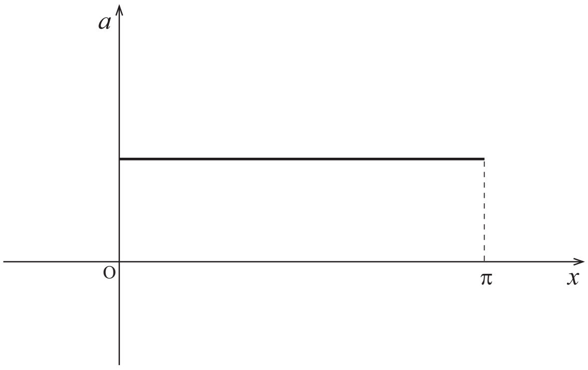


Gráfico 4



6. A massa de uma substância radioactiva diminui com a passagem do tempo. Supõe-se que, para uma amostra de uma determinada substância, a massa, em gramas, ao fim de t **horas** de observação, é dada pelo modelo matemático $M(t) = 15 \times e^{-0,02\ t}$, $t \geq 0$.

Resolva, **usando métodos analíticos**, os dois itens que se seguem.

Nota:

A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

6.1. Ao fim de quanto tempo se reduz a metade a massa inicial da amostra da substância radioactiva?

Apresente o resultado em **horas e minutos**, estes arredondados às unidades.

6.2. Utilize o **Teorema de Bolzano** para justificar que houve, pelo menos, um instante, entre as 2 horas e 30 minutos e as 4 horas após o início da observação, em que a massa da amostra da substância radioactiva atingiu os 14 gramas.

7. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 2 + \operatorname{sen}(4x)$.

Resolva, **usando métodos analíticos**, os dois itens seguintes.

Nota:

A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

7.1. Determine $g'(0)$, recorrendo à **definição de derivada** de uma função num ponto.

7.2. Estude a monotonia da função g, no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, indicando o valor dos extremos relativos, caso existam, e os intervalos de monotonia.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I	(8 × 5 pontos)		**40 pontos**
GRUPO II			**160 pontos**
1.		30 pontos	
1.1.	15 pontos		
1.2.	15 pontos		
2.		30 pontos	
2.1.	15 pontos		
2.2.	15 pontos		
3.		15 pontos	
4.		15 pontos	
5.		15 pontos	
6.		30 pontos	
6.1.	15 pontos		
6.2.	15 pontos		
7.		25 pontos	
7.1.	10 pontos		
7.2.	15 pontos		
TOTAL			**200 pontos**

Ministério da Educação

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Prova Escrita de Matemática A

12.º ano de Escolaridade

Prova 635/2.ª Fase

11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos

2008

COTAÇÕES

GRUPO I	(8 × 5 pontos)		**40 pontos**
GRUPO II			**160 pontos**
1.		30 pontos	
1.1.	15 pontos		
1.2.	15 pontos		
2.		30 pontos	
2.1.	15 pontos		
2.2.	15 pontos		
3.		15 pontos	
4.		15 pontos	
5.		15 pontos	
6.		30 pontos	
6.1.	15 pontos		
6.2.	15 pontos		
7.		25 pontos	
7.1.	10 pontos		
7.2.	15 pontos		
TOTAL			**200 pontos**

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO DA PROVA

As classificações a atribuir às respostas são expressas em números inteiros não negativos.

Itens de resposta fechada de escolha múltipla

As respostas em que é assinalada a alternativa correcta são classificadas com a cotação total do item. As respostas incorrectas são classificadas com zero pontos. Não há lugar a classificações intermédias.

Itens de resposta aberta

Os critérios de classificação destes itens apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

Os critérios de classificação dos itens de resposta aberta extensa orientada apresentam-se organizados por níveis de desempenho. Nestes itens, desde que tenham cotação igual ou superior a quinze pontos e impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa.

A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização é cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho a seguir descritos:

Nível	Descritor
3	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique a perda de inteligibilidade e/ou de rigor de sentido.
2	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou ortografia, cuja gravidade não implique a perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
1	Composição sem estruturação aparente, com a presença de erros graves de sintaxe, pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No quadro seguinte, apresentam-se critérios de classificação a aplicar às respostas aos itens em situações não consideradas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Engano na identificação do item a que o examinando está a responder. 2. Omissão da identificação do item a que o examinando está a responder.	Deve ser vista e classificada a resposta se, pela resolução apresentada, for possível identificar inequivocamente o item.
3. É apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item e o examinando não indica, de forma inequívoca, aquela que pretende que seja classificada.	Deve ser vista e classificada apenas a resposta que surge em primeiro lugar, na folha de respostas.
4. É apresentado apenas o resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	A resposta deve ser classificada com zero pontos.
5. Ilegibilidade da resposta.	A resposta deve ser classificada com zero pontos.
6. Item com etapas.	A cotação indicada para cada etapa é a classificação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta ao item resulta da soma das classificações das diferentes etapas, à qual, eventualmente, se subtrai um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 16 e 21.
7. Etapa com passos.	A cotação indicada para cada passo é a classificação máxima que lhe é atribuível. A classificação da etapa resulta da soma das classificações dos diferentes passos.
8. Item ou etapa com classificação por níveis de desempenho.	O classificador deve enquadrar a resposta do examinando numa das descrições apresentadas, não podendo atribuir uma classificação diferente das indicadas.
9. Utilização de processos de resolução do item que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «usando métodos analíticos»].	São classificadas com zero pontos as etapas em que a instrução não foi respeitada e todas as etapas subsequentes que delas dependam.
10. Utilização de processos de resolução do item não previstos nos critérios específicos.	Deve ser aceite qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nos critérios específicos de classificação ou no programa. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante a distribuição da cotação do item pelas etapas percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.

Situação	Classificação
11. Não são apresentadas, explicitamente, todas as etapas, mas a resolução apresentada permite perceber, inequivocamente, que elas foram percorridas.	A(s) etapa(s) implícita(s) é(são) classificada(s) com a cotação total para ela(s) prevista.
12. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, deve subtrair-se um ponto à classificação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a classificação máxima a atribuir a essa etapa não deve ser superior a 50% da cotação prevista.
13. Erro ocasional num cálculo.	Deve subtrair-se um ponto à classificação da etapa em que ocorre o erro.
14. Erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A classificação máxima a atribuir a essa etapa não deve ser superior a 50% da cotação prevista para a mesma.
15. Erro na resolução de uma etapa.	A resolução dessa etapa é classificada de acordo com o erro cometido. Se o erro não diminuir o grau de dificuldade das etapas subsequentes, estas são classificadas de acordo com os critérios de classificação. Se o erro diminuir o grau de dificuldade das etapas subsequentes, a classificação máxima a atribuir a essas etapas não deve ser superior a 50% da cotação prevista.
16. Em cálculos intermédios, é pedida uma aproximação com um certo número de casas decimais. O examinando não respeita o pedido e/ou os arredondamentos estão incorrectos.	Deve subtrair-se um ponto à classificação total da resposta.
17. A apresentação do resultado final não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção e o examinando escreve na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros e o examinando apresenta-o em metros].	Deve subtrair-se um ponto à classificação da etapa correspondente ao resultado final.
18. Na apresentação do resultado final, não está expressa a unidade de medida [exemplo: «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa ao resultado final é classificada como se a unidade de medida estivesse indicada.

Situação	Classificação
19. O resultado final é apresentado com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	Deve subtrair-se um ponto à classificação da etapa correspondente ao resultado final.
20. O resultado final apresenta um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou está incorrectamente arredondado.	Deve subtrair-se um ponto à classificação da etapa correspondente ao resultado final.
21. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	Deve subtrair-se um ponto à classificação total da resposta, excepto: – se as incorrecções ocorrerem apenas em etapas já classificadas com zero pontos; – no caso de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a **8.** .... (8 × 5 pontos) .... **40 pontos**

As respostas correctas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	D	D	C	A	B	B	D	A
Versão 2	A	A	B	D	C	C	A	D

GRUPO II

É de aceitar qualquer processo de resolução científicamente correcto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos ou no programa (ver critério 10 dos critérios gerais).

1.1. .... **15 pontos**

Substituir na expressão dada z_1 por $1 - i$ .... 1 ponto

Calcular i^{18} $\left(i^{18} = -1\right)$ .... 3 pontos

Simplificar o numerador .... 3 pontos

Escrever $\dfrac{-2i}{1-2i} \times \dfrac{1+2i}{1+2i}$ .... 1 ponto

Obter $\dfrac{-2i+4}{5}$ .... (3 + 3)..................................... 6 pontos

Apresentar o resultado na forma pedida .... 1 ponto

1.2. .... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º processo

Representar, no plano complexo, as imagens geométricas das raízes quartas de z (sendo uma delas $1 - i$) .... 6 pontos

Concluir que a raiz quarta pedida é $-1 - i$ .... 3 pontos

Escrever $-1 - i$ na forma trigonométrica .... 6 pontos

Calcular $|-1-i|$ .... 2 pontos

Calcular um argumento de $-1 - i$ .... 3 pontos

Escrever na forma trigonométrica .... 1 ponto

2.º processo

Calcular $\left|z_1\right|$ .... 2 pontos

Calcular um argumento de z_1 .... 3 pontos

Determinar a raiz quarta pedida: $\left(z_2 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{5}{4}\pi\right) \text{ou equivalente}\right)$ ..... 10 pontos

Reconhecer que $\left|z_2\right| = \left|z_1\right|$ .... 2 pontos

Calcular um argumento de z_2, utilizando uma propriedade das raízes índice *n* de um número complexo .... 7 pontos

Escrever z_2 na forma trigonométrica .... 1 ponto

3.º processo

Calcular $\left|z_1\right|$ .... 2 pontos

Calcular um argumento de z_1 .... 3 pontos

Escrever z_1 na forma trigonométrica .... 1 ponto

Determinar z, usando a potência $(z_1)^4$ .... 3 pontos

Escrever a expressão geradora das raízes quartas de z .... 2 pontos

Determinar a raiz quarta pedida: $\left(z_2 = \sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right.$ ou equivalente$\left.\right)$ .... 4 pontos

2.1. .... **15 pontos**

A resposta do examinando deve contemplar os seguintes pontos:

- Leis de De Morgan;
- propriedade relativa à probabilidade do acontecimento contrário;
- propriedade relativa à probabilidade da união de dois acontecimentos.

Na tabela seguinte, indica-se como a resposta a este item deve ser classificada, de acordo com o respectivo nível de desempenho no domínio específico da disciplina:

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina			Pontuação
Níveis	4	O examinando executa correctamente os três pontos e conclui o pretendido.	15
	3	O examinando executa correctamente os três pontos, mas não conclui o pretendido.	12
	2	O examinando executa correctamente apenas dois pontos.	8
	1	O examinando executa correctamente apenas um ponto.	4

2.2. .... **15 pontos**

Designemos por A o acontecimento «o estudante é rapaz» e por B o acontecimento «o estudante tem classificação positiva».

Calcular o número de raparigas que tiveram classificação positiva .... 2 pontos

Calcular o número de rapazes que tiveram classificação positiva .... 2 pontos

Determinar o número total de estudantes que fizeram o exame .... 1 ponto

Calcular a probabilidade pedida (**ver nota 1**) .... 9 pontos

$P(\overline{A}) = \frac{160}{280}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

$P(B) = \frac{176}{280}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

$P(A \cup B) = \frac{224}{280}$ (ou equivalente) .... 3 pontos

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \frac{208}{280}$ (ou equivalente) .... 2 pontos *ou*

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B)$ .... 3 pontos

$P(A \cap B) = \dfrac{72}{280}$ .... 4 pontos

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = \dfrac{208}{280}$ .... 2 pontos

Resultado na forma pedida (**ver nota 2**) .... 1 ponto

Notas:

1. O examinando pode recorrer a uma tabela para encontrar os valores necessários ao cálculo das probabilidades.
2. Se o valor obtido não pertencer ao intervalo $[0, 1]$, a classificação a atribuir ao resultado deverá ser de zero pontos.

3. .... **15 pontos**

Indicar os valores que a variável X pode tomar: $X_i \in \{2, 3, 4\}$ (**ver nota 1**) ...... 2 pontos

Indicar o número de casos possíveis .... 2 pontos

Indicar o número de casos favoráveis para cada um dos valores da variável .... (2 + 2 + 2) ...... 6 pontos

Construir a tabela de distribuição (**ver nota 2**) .... 3 pontos

Indicar e justificar o valor da variável mais provável: $(X = 3)$ .... (1 + 1) .... 2 pontos

Notas:

1. Se os valores da variável não estiverem todos correctos, a classificação a atribuir a esta etapa deverá ser de zero pontos.
2. Se o examinando não apresentar todas as probabilidades na forma de fracção irredutível, a classificação deve ser desvalorizada em um ponto.

4. .... **15 pontos**

Representar graficamente a função f .... 3 pontos

Representar graficamente a função g .... 3 pontos

Assinalar devidamente os pontos A e B .... (1 + 1)............. 2 pontos

Coordenadas aproximadas dos pontos A e B (**ver nota 1**) .... (2 + 2)............. 4 pontos

Soluções inteiras $(0, 1$ e $2)$ (**ver nota 2**).. 3 pontos

Notas:

1. As coordenadas, arredondadas às décimas, de um dos pontos são $(-0{,}3\,;\ -2{,}3)$ e do outro são $(2{,}3\,;\ 0{,}3)$. São de aceitar, sem qualquer desvalorização, para valores das coordenadas dos pontos A e B, valores que difiram dos valores dados numa décima. Se os valores apresentados diferirem menos de uma décima dos valores dados, a classificação total da resposta deverá ser desvalorizada em 1 ponto (critério geral 16).
2. Qualquer outra resposta deverá ser classificada com zero pontos.

5. .... **15 pontos**

Apresenta-se, a seguir, para cada um dos gráficos incorrectos, a razão pela qual não pode representar a função a:

- Gráfico 1: este gráfico é inadequado, porque apresenta para domínio da função o intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, o que não está correcto, uma vez que o ponto S, ao deslocar-se ao longo da recta s, permite que a amplitude do ângulo BAS seja igual ou superior a $\frac{\pi}{2}$;
- Gráfico 3: este gráfico é inadequado, porque indica que a função é estritamente crescente no intervalo $]0, \pi[$, o que não está correcto, uma vez que, à medida que o ponto S se desloca ao longo da recta s, o triângulo $[ABS]$ obtido mantém sempre a mesma base $\overline{AB}$ e a mesma altura (distância entre as duas rectas); logo, a área é constante;
- Gráfico 4: este gráfico é inadequado, porque apresenta 0 e π como possíveis valores de x, o que não está correcto, uma vez que o ponto S nunca pode pertencer à recta AB, dado que se desloca ao longo de uma recta estritamente paralela a esta.

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a justificação pedida, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa descritos nos critérios gerais e os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina:

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina \ Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa			Níveis 1	Níveis 2	Níveis 3
Níveis	**3**	Explica correctamente a inadequação dos gráficos 1, 3 e 4.	13	14	15
	2	Explica correctamente a inadequação dos gráficos 1 e 3, ou 1 e 4 ou 3 e 4.	8	9	10
	1	Explica correctamente a inadequação do gráfico 1 ou 3 ou 4.	3	4	5

Apenas podem ser atribuídas classificações correspondentes a um dos valores constantes do quadro. Não há lugar a classificações intermédias.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

6.1. .... **15 pontos**

Equacionar o problema: $M(t)=\dfrac{M(0)}{2}$ .... 2 pontos

Calcular $M(0)$ $\big((M(0)=15\big)$ .... 1 ponto

Resolver a equação $15\times e^{-0,02\,t}=\dfrac{15}{2}$ .... 9 pontos

Obter a equação $e^{-0,02\,t}=\dfrac{1}{2}$ (ou equivalente) .... 3 pontos

Obter a equação $-0,02\,t=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ .... 3 pontos

Obter o valor de t com três casas décimais $(t\cong 34,657)$ .... 3 pontos

Resultado $(34 \text{ horas e } 39 \text{ minutos})$ .... 3 pontos

6.2. .... **15 pontos**

Converter $2 \text{ horas e } 30 \text{ minutos em } 2,5 \text{ horas}$ .... 2 pontos

Referir que a função M é contínua em $[2,5;\ 4]$ (**ver nota 1**) .... 2 pontos

Calcular $M(2,5)$ .... 3 pontos

Calcular $M(4)$ .... 3 pontos

Concluir que $M(4)<14<M(2,5)$ ou que
$M(2,5)-14$ e $M(4)-14$ têm sinais contrários .... 3 pontos

Concluir o pretendido (**ver nota 2**) .... 2 pontos

Notas:

1. Se o examinando não referir a continuidade da função no intervalo $[2,5;\ 4]$, mas afirmar que a função é contínua no seu domínio, a classificação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada.
2. Se o examinando concluir o pretendido, mas não referir que a conclusão resulta do Teorema de Bolzano, ou do seu Corolário, a classificação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada.

7.1. .... **10 pontos**

$g'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 + \text{sen}(4x) - 2}{x}$ ....(1 + 2)............... 3 pontos

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(4x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4\ \text{sen}(4x)}{4x}$ .... 3 pontos

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4\ \text{sen}(4x)}{4x} = 4 \times \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(4x)}{4x}$ .... 2 pontos

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(4x)}{4x} = 1$ .... 1 ponto

$g'(0) = 4$ .... 1 ponto

Nota: Se o examinando calcular $g'(0)$ utilizando as regras da derivação, a classificação a atribuir à sua resposta deverá ser zero pontos, mesmo estando ela correcta.

7.2. .... **15 pontos**

Determinar $g'(x)$ .... 2 pontos

Determinar os zeros de g' .... 4 pontos

Escrever a equação $g'(x) = 0$ .... 1 ponto

Determinar a expressão geral dos zeros de g'

$x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$ .... 1 ponto

Indicar os zeros de g' no intervalo $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $\left(\dfrac{\pi}{8}\right.$ e $\left.\dfrac{3\pi}{8}\right)$ .... 2 pontos

Estudar o sinal de g' e consequente conclusão, relativamente à monotonia e extremos relativos de g no intervalo $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, com recurso a um quadro.......... 5 pontos

Primeira linha do quadro (relativa à variável x, de acordo com o intervalo em estudo) .... 2 pontos

Sinal de g' .... 2 pontos

Relação entre o sinal de g' e a monotonia de g .... 1 ponto

Determinar os extremos relativos $(1$ e $3)$ .... 2 pontos

Indicar os intervalos de monotonia (**ver nota**) .... 2 pontos

Nota: A resposta correcta é indicar os intervalos $\left]0, \dfrac{\pi}{8}\right]$ e $\left[\dfrac{3\pi}{8}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, para intervalos onde a função é monótona crescente e indicar o intervalo $\left[\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{3\pi}{8}\right]$, para intervalo onde a função é monótona decrescente.

No entanto, é de aceitar, sem qualquer desvalorização, os intervalos $\left]0, \dfrac{\pi}{8}\right[$ e $\left]\dfrac{3\pi}{8}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ para intervalos onde a função é monótona crescente e o intervalo $\left]\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{3\pi}{8}\right[$ para intervalo onde a função é monótona decrescente.