PROPOSTA DE CORRECÇÃO DO 3º TESTE MATEMÁTICA A – 12º ANO	Turma A	16 FEVEREIRO 2012

GRUPO I

1. Opção B
2. Opção D $\quad -e^x < 0$ logo $-e^x - c < -c$
3. Opção C $\quad x > 0 \wedge lnx \neq 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x \neq 1$
4. Opção C $\quad b_n = 5 - n^2 \to -\infty$ logo $\lim g(b_n) = 1$
5. Opção B

GRUPO II

1. X a variável aleatória: "*soma dos números saídos nos dois lançamentos*".

1.1. Para a soma ser 3 tem que sair 1 e 2 logo $P = \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} \times 2 = \frac{4}{9}$

1.2. $P(X = k) = \frac{1}{9}$ probabilidade de sair 2, isto é $P = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ Logo *K* = 2

1.3. A variável X pode tomar os valores 2, 3 e 4.

$X = x_i$	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

2.

$$10^{0,4(m-M)} = \frac{d^2}{100} \Leftrightarrow 0,4(m - M) = log\left(\frac{d^2}{100}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{5}(m - M) = logd^2 - log100 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{5}(m - M) = 2logd - 2 \Leftrightarrow 2(m - M) = 10logd - 10 \Leftrightarrow m - M = 5logd - 5 \Leftrightarrow$$

$$m = M - 5(1 - logd)$$

3. $2\log_3 x - \log_3(x + 2) \leq 0 \Leftrightarrow$

$\log_3 x^2 - \log_3(x + 2) \leq 0 \Leftrightarrow$

$\log_3 x^2 \leq \log_3(x + 2) \Leftrightarrow x^2 \leq x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 2]$

<u>Domínio</u>: $x > 0 \wedge x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x > -2 \Leftrightarrow x > 0$

C.S. $[-1; 2] \cap]0; +\infty[=]0; 2]$

4.

4.1. $P(t) = \frac{90}{1+15e^{-0,54t}} = 50 \Leftrightarrow 1 + 15e^{-0,54t} = \frac{9}{5} \Leftrightarrow 15e^{-0,54t} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow e^{-0,54t} = \frac{4}{75}$

$$\Leftrightarrow -0,54t = ln\frac{4}{75} \Leftrightarrow t = \frac{\ln\frac{4}{75}}{-0,54} \Leftrightarrow t \cong 5,43$$

Durante o ano de 1995.

4.2. Determine $\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{90}{1+15e^{-0,54t}} = \frac{90}{1+15e^{-\infty}} = 90$

Significa que a percentagem de habitantes com telemóvel nunca ultrapassará os 90%.

5.

5.1. Indeterminação $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to-1} h(x) = \lim_{x\to-1} \frac{2x^2-x-3}{x^2-x-2} = \lim_{x\to-1} \frac{2(x-1,5)(x+1)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to-1} \frac{2(x-1,5)}{(x-2)} = \frac{2(-1-1,5)}{-1-2} = \frac{5}{3}$$

5.2. Indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-x-3}{x^2-x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

5.3. $\lim_{x\to0} \left(\frac{1-e^{-2x}}{x} - h(x)\right) = \lim_{x\to0} \frac{1-e^{-2x}}{x} - \lim_{x\to0} h(x) = -2 \times \lim_{x\to0} \frac{-(e^{-2x}-1)}{-2x} - \left(\frac{-3}{-2}\right) =$

$= 2 \times 1 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

6.

6.1. No intervalo $\left[-\frac{1}{2};1\right[$ a função é contínua porque é a soma de funções contínuas.

No intervalo $]1;+\infty[$ a função é contínua porque é a divisão de funções contínuas.

No ponto $x = 1$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} 2x + \ln(1+x-x^2) = 2 + ln1 = 2$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2-1} =$$

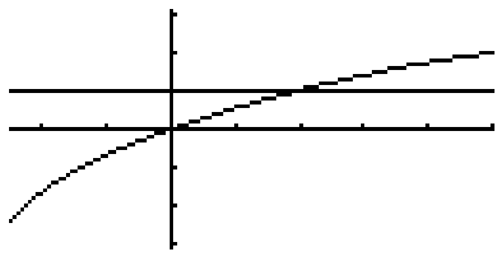
$$= \lim_{x\to1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} (\sqrt{x}+1) = \sqrt{1}+1 = 2$$

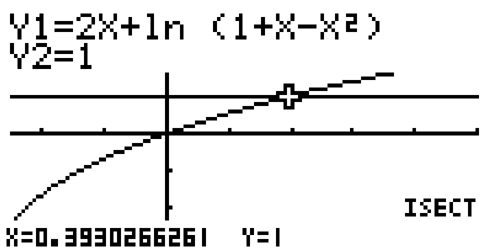
Logo $\lim_{x\to1} f(x) = 2$

Como $f(1) = 2$ então a função é contínua em $x = 1$ pelo que é contínua no intervalo $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

6.2. $\left[-\frac{1}{2};1\right[$ tal que $f(x) = -2 + f(4)$

Como $f(4) = \frac{4-1}{\sqrt{4}-1} = 3$ então $f(x) = -2+3 \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow 2x + \ln(1+x-x^2) = 1$





6.3. A função f é contínua no intervalo $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ porque é a soma de funções contínuas.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=2\left(-\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)\cong\ -2{,}38$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\cong\ 1{,}22$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)\times f\left(\frac{1}{2}\right)<0$$

Então o T. Bolzano garante que a função tem pelo menos um zero no intervalo $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$.