ESCOLA SECUNDÁRIA DE CASQUILHOS

12º Ano   Turma **B**   - C.C.H. de Ciências e Tecnologias -

3º Teste de Avaliação de Matemática A   15 Fevereiro 2012

Duração: **90** min   **Prof.:** Maria João Mendes Vieira

Na folha de respostas, indicar de forma legível a versão da prova.
A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilizar apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem
a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser primeiramente elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.
Utilizar a calculadora gráfica, sempre que for necessário.
Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escrever de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresentar apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.
Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:
• o número do item;
• a letra que identifica a única alternativa correcta.
Não apresente cálculos, nem justificações.

O teste inclui, um Formulário, na última página.
As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado do teste.

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única alternativa correcta.
Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a alternativa seleccionada.
Não apresente cálculos nem justificações.

1. O Pedro e o André querem telefonar a um amigo. O André sabe que o número de telefone tem os algarismos todos diferentes, o Pedro sabe que começa por 21 e termina em 564.
Se digitarem ao acaso os restantes 4 algarismos, qual a probabilidade de acertarem à primeira tentativa?

(A) $\frac{1}{^5A_4}$ (B) $\frac{4!}{10!}$ (C) $\frac{1}{24}$ (D) $\frac{1}{4^4}$

2. Sendo $h(x) = e^x + c$, em que c é um número real qualquer e e é o número de Neper, podemos afirmar que h:

(A) Tem um único zero   (B) Tem no máximo um zero

(C) Tem pelo menos um zero   (D) Nunca tem zeros

3. O domínio da função real de variável real $f(x) = \frac{x}{1-lnx}$ é:

(A) $|R^+$ (B) $|R\backslash\{1\}$ (C) $|R^+\backslash\{1\}$ (D) $|R^+\backslash\{e\}$

4. Considera a função definida por $g(x) = \frac{3x-2}{1-x}$.
Indique o valor de $\lim_{x\to 1^+} g(x)$:

(A) 1 (B) 0 (C) $-\infty$ (D) $+\infty$

5. Seja f a função, de domínio |R, definida por $f(x) = \begin{cases} 1+2^x & se\ \ x<0 \\ 2 & se\ \ x=0 \\ 2x+1 & se\ x>0 \end{cases}$.

Relativamente à continuidade da função f, no ponto 0, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\text{É}\ contínua$

(B) $\text{É}\ contínua\ \text{à}\ esquerda\ e\ descontínua\ \text{à}\ direita$

(C) $\text{É}\ contínua\ \text{à}\ direita\ e\ descontínua\ \text{à}\ esquerda$

(D) $\text{É}\ descontínua\ \text{à}\ esquerda\ e\ \text{à}\ direita$

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.
Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Uma caixa contém bolas brancas e bolas pretas, num total de 12 bolas. Considere a experiência aleatória que consiste na extração sucessiva, **com reposição**, de duas bolas.

Seja X a variável aleatória que representa o número de **bolas brancas** extraídas.
Na tabela seguinte encontra-se representada a distribuição de probabilidades da variável aleatória X.

$X = x_i)$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$

1.1. Indica a probabilidade de sair pelo menos uma bola branca.

1.2. Represente, através de uma tabela, a distribuição de probabilidades da variável aleatória Y «número de **bolas pretas** extraídas»

1.3. Quantas bolas brancas e quantas bolas pretas tem a caixa? Justifique a sua resposta.

2. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{1}{\ln(x-1)}$

2.1. Utilizando processos analíticos, determine, na forma de intervalo de números reais os valores de x tais que $\frac{1}{f(x)} < 2$.

2.2. Considere a função $g(x) = e^x - 1$.
A equação $f(x) = g(x)$ tem uma única solução.
Utilizando a calculadora, determine-a graficamente.
Apresente o resultado arredondado às décimas e explique como procedeu, apresentando o gráfico, ou gráficos, obtidos na calculadora e indicando as coordenadas dos pontos relevantes.

3. Um grupo de veados é colocado numa ilha onde até então não existia qualquer veado.
Admita que, a população de veados, na ilha, cresce de acordo com a função
$N(t) = \frac{200}{1+4e^{-0,12t}}$, onde N é o número de veados existentes t anos após a chegada dos veados à ilha.

3.1. Determine quantos veados foram colocados na ilha e o número de veados existentes 5 anos depois da sua chegada à mesma ilha.

3.2. Utilizando processos exclusivamente analíticos (utilize a calculadora apenas para cálculos numéricos e nesse caso conserve no mínimo 3 casas decimais) determine ao fim de quantos anos existirão 100 veados na ilha.

3.3. Determine $\lim_{t\to+\infty} N(t)$ e interprete o resultado no contexto do problema.

4. Considera a função h, definida por $h(x) = \frac{x^2-x-2}{2x^2-x-3}$. Calcule os seguintes limites:

4.1. $\lim_{x\to-1} h(x)$

4.2. $\lim_{x\to-\infty} h(x)$

4.3. $\lim_{x\to 0}\left(h(x) + \frac{e^{3x}-1}{x}\right)$

5. Seja f a função, de domínio |R, definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3-\sqrt{9-x}} & se\ \ x < 0 \\ 6 & se\ x = 0 \\ \frac{\ln(x+1)+5x}{x} & se\ \ x > 0 \end{cases}$

5.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, estude a função quanto à continuidade.

5.2. Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a equação $f(x) = 5{,}4$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]2; 5[$.

FIM

FORMULÁRIO

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

COTAÇÕES																		
Grupo I					**Grupo II**													**Total**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**1.1.**	**1.2.**	**1.3.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.1.**	**5.2.**	
10	10	10	10	10														**200**