

Proposta de resolução da Prova de Matemática A (código 635)

2ª fase

19 de Julho de 2010

Grupo I

1.

Como só existem bolas de dois tipos na caixa e a probabilidade de sair bola azul é $\frac{1}{2}$, existem tantas bolas roxas quantas as azuis, que são 8.

Resposta correcta:

Versão 1: C
Versão 2: B

2.

Escolhendo três das cinco posições do número para os algarismos 5, temos 5C_3 hipóteses e podem ainda ser colocados os 4 restantes algarismos nas 2 restantes posições, podendo fazê-lo com repetição (4^2 hipóteses), pelo que existem ${}^5C_3 \times 4^2$ números nas condições do enunciado.

Resposta correcta:

Versão 1: B
Versão 2: C

3.

Na linha do triângulo de Pascal em causa apenas os números reproduzidos no enunciado são inferiores ou iguais a 105, pelo que nenhum dos restantes poderia ser parcela de uma soma com resultado 105. Dos números apresentados também não é possível somar dois deles com o resultado 105, pelo que nenhum par de números desta linha do Triângulo de Pascal tem soma 105, logo o valor da probabilidade solicitada é 0 (zero).

Resposta correcta:

Versão 1: D
Versão 2: A

4.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - 2x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

Como a função h é par, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$,

Ou seja $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$

Resposta correcta:

Versão 1: A
Versão 2: D

5.

Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [\ln(u_n)] = \ln 0^+ = -\infty$$

Resposta correcta:

Versão 1: D
Versão 2: A

6.

Pela observação do gráfico da função f' , derivada da função f , conclui-se que no intervalo $]0, a[$ a função derivada é positiva, logo a função é crescente nesse intervalo.

Resposta correcta:

Versão 1: C
Versão 2: B

7.

Como o vértice A é a representação geométrica de um número complexo de módulo 1, o mesmo acontecerá com o número complexo representado geometricamente pelo vértice D.

Como os argumentos dos números complexos representados por dois vértices consecutivos do pentágono diferem de $\frac{2\pi}{5}$, o argumento do número complexo representado pelo vértice D será $3 \times \frac{2\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$.

Resposta correcta:

Versão 1: B
Versão 2: C

8.

Como $w = \rho \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, $w^6 = \rho^6 \operatorname{cis}\left(6 \times \frac{3\pi}{2}\right) = \rho^6 \operatorname{cis}\left(\frac{18\pi}{2}\right) = \rho^6 \operatorname{cis}(9\pi) = \rho^6 \operatorname{cis} \pi$.

Logo a representação geométrica de w^6 pertence ao eixo real.

Resposta correcta:

Versão 1: A
Versão 2: D

Grupo II

1.

1.1.

$$z_1^4 = (\sqrt{2})^4 \operatorname{cis}\left(4 \times \frac{\pi}{4}\right) = 4 \operatorname{cis}(\pi) = -4$$

$$w = \frac{-4+4i}{i} = \frac{(-4+4i) \times i}{i \times i} = \frac{-4i+4i^2}{i^2} = \frac{-4-4i}{-1} = 4+4i$$

Na forma trigonométrica: $\rho = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$

$$\left. \begin{array}{l} \tan \theta = 1 \\ \theta \in 1^\circ \text{Q} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Então: $w = 4+4i = 4\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$

1.2.

$$z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} i = 1 + i$$

Sejam A e B as imagens geométricas dos complexos z_1 e z_2 .

Temos então que as suas coordenadas são : $A(1,1)$ e $B(3,0)$

O raio da circunferência é $\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

A condição pedida é, pois, $|z-3| = \sqrt{5}$

2.

2.1. A variável aleatória X , tal como está definida, toma os valores $-3, -2, -1, 0$ e 1

$$P(X = -3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$P(X = -2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$P(X = -1) = \frac{4}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 0) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

$$P(X = 1) = \frac{4}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

A tabela de distribuição de X é, assim:

x_i	-3	-2	-1	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{9}$

- 2.2. $P(L | J)$ representa a probabilidade de o ponto Q pertencer ao 3º quadrante sabendo que o número saído no dado A é negativo.

Ora, para que o ponto Q pertença ao 3º quadrante é necessário que tenha abcissa e ordenada negativas. Já sabemos que a sua abcissa é negativa, visto que o número saído no dado A é negativo. Então basta agora que a sua ordenada seja também negativa. Assim sendo, para que isso aconteça, existe apenas um caso favorável entre seis possíveis (a saída da face -1 no dado B). Como todos os acontecimentos são equiprováveis, pela regra de Laplace, vem que $P(L | J) = \frac{1}{6}$

3.

$$\begin{aligned} \frac{P(A \cup B)}{P(B)} - P(\bar{A} | B) &= \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} - \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B) - [P(B) - P(A \cap B)]}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \end{aligned}$$

c.q.d.

4.

- 4.1. Atendendo ao domínio da função, a existir assíntota oblíqua, ela será quando $x \rightarrow +\infty$.

Determinemos, se existir, o seu declive:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{5}x - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{5}x}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$$

E a sua ordenada na origem, se existir:

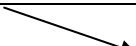
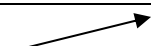
$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}x - \ln x - \frac{1}{5}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln x) = -\infty$$

Como b não é um número real, então o gráfico da função não admite assíntotas oblíquas.

4.2. Estudemos, no intervalo $]2, +\infty[$, a função derivada de f .

$$f'(x) = \frac{1}{5} - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = 5$$

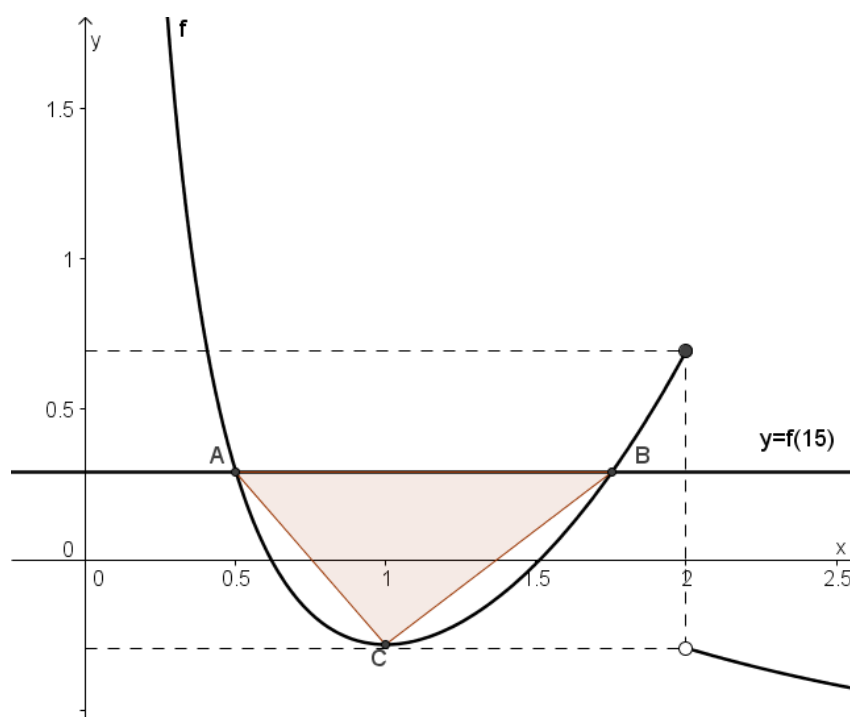
	2		5	$+\infty$
$f'(x)$	n.d.	-	0	+
$f(x)$	n.d.		min	

Estudado o comportamento da função podemos concluir que admite um mínimo para $x = 5$, que é $f(5) = 1 - \ln 5$, pelo que f admite no intervalo $]2, +\infty[$ um extremo relativo, c.q.d.

4.3.

$$f(15) = 3 - \ln 15$$

Utilizando as capacidades gráficas da calculadora, representemos graficamente a função f e a recta de equação $y = 3 - \ln 15$.



Determinando a intersecção da recta com o gráfico da função obtemos para as coordenadas de A e de B , as seguintes: $A(0,50 ; 0,29)$ e $B(1,75 ; 0,29)$.

Determinando o mínimo da função no intervalo em causa, obtemos para coordenadas do ponto $C(1,00 ; -0,28)$

Temos então que a área do triângulo $[ABC]$ é dada por

$$\frac{(1,75 - 0,50) \times (3 - \ln(15) + 0,28)}{2} \approx 0,4$$

5.

5.1. f é contínua em \mathbb{R} , por se tratar de soma e composição de funções contínuas, logo é também contínua no intervalo $[-2, -1]$.

$$f(-2) = 2 + e^{2 \times (-8) - 1} \approx 2,000$$

$$f(-1) = 1 + e^{2 \times (-1) - 1} \approx 1,050$$

Ora $f(-1) < 1,5 < f(-2)$, logo, pelo Teorema de Bolzano, há-de existir pelo menos um valor $x_1 \in]-2, -1[$ tal que $f(x_1) = 1,5$ ou seja, a equação $f(x) = 1,5$ tem pelo menos uma solução nesse intervalo, c.q.d.

5.2. $f'(x) = -1 + 6x^2 e^{2x^3 - 1}$

$$f'(0) = -1 + 0 \times e^{-1} = -1$$

$$f(0) = 0 + e^{2 \times 0 - 1} = e^{-1}$$

A recta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa zero tem declive $f'(0) = -1$ e contém o ponto de coordenadas $(0, \frac{1}{e})$ logo a sua equação reduzida é $y = -x + \frac{1}{e}$

6.

6.1. A altura do combustível no reservatório é dada por $\overline{AC} = \overline{OA} - \overline{OC}$ para $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$ e por $\overline{AC} = \overline{OA} + \overline{OC}$ para $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

Para $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$ temos que

$$\cos \theta = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\overline{OC}}{3} \Leftrightarrow 3 \cos \theta = \overline{OC}$$

$$\overline{AC} = 3 - \overline{OC} = 3 - 3 \cos \theta$$

Para $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ temos que

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \theta) &= \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \cos(\pi - \theta) = \frac{\overline{OC}}{3} \Leftrightarrow 3 \cos(\pi - \theta) = \overline{OC} \\ &\Leftrightarrow -3 \cos \theta = \overline{OC} \end{aligned}$$

$$\overline{AC} = 3 + \overline{OC} = 3 - 3 \cos \theta$$

Logo, em qualquer dos casos, a altura do combustível no reservatório é dada pela expressão $3 - 3 \cos \theta$, ou seja, $h(\theta) = 3 - 3 \cos \theta$, c.q.d.

6.2.

$$h(\theta) = 3 \Leftrightarrow 3 - 3 \cos \theta = 3 \Leftrightarrow -3 \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = 0$$

Como $\theta \in]0, \pi[$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Quando a altura do combustível no depósito é 3, o ângulo AOB é $\frac{\pi}{2}$ rad. Portanto $C \equiv O$, e o depósito está a metade da sua capacidade.

FIM

Esta proposta de resolução também pode ser consultada em <http://www.apm.pt>