Intersecção de planos

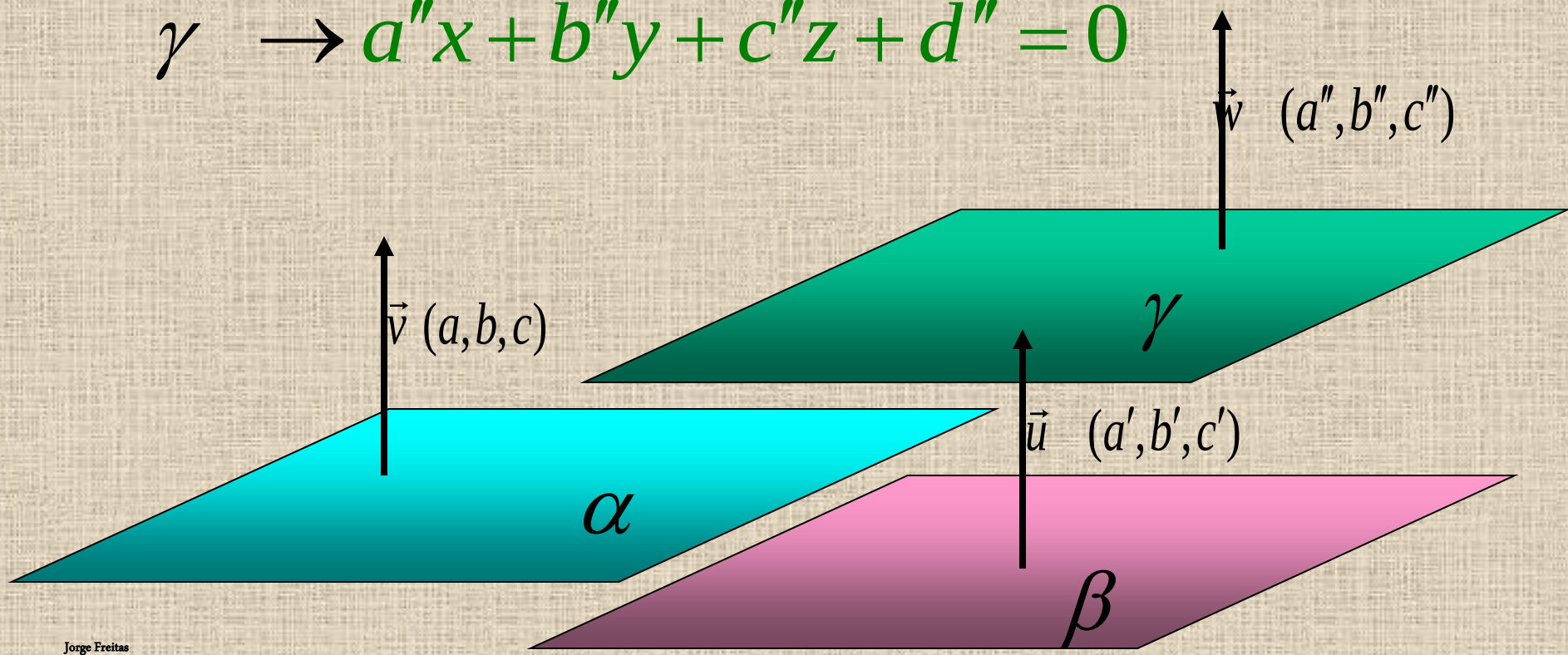
Jorge Freitas
ESAS 2006

Posição relativa de 3 planos

$$\alpha \rightarrow ax+by+cz+d=0$$

$$\beta \rightarrow a'x+b'y+c'z+d'=0$$

$$\gamma \rightarrow a''x+b''y+c''z+d''=0$$



Jorge Freitas
ESAS 2006

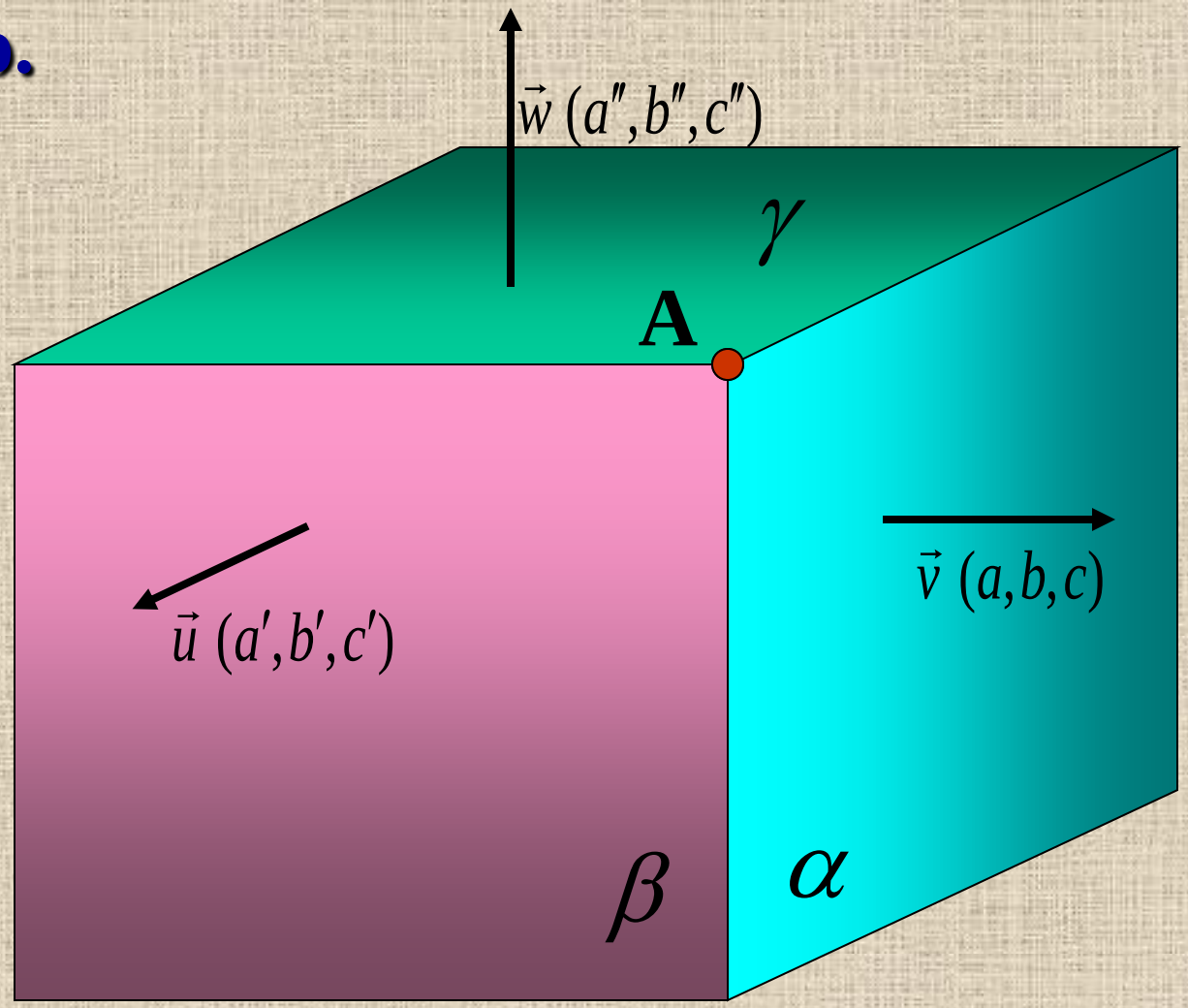
A intersecção de três planos obtém-se resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$$

$\vec{v}, \vec{u}$ e $\vec{w}$

não são colineares

Sistema possível e determinado.

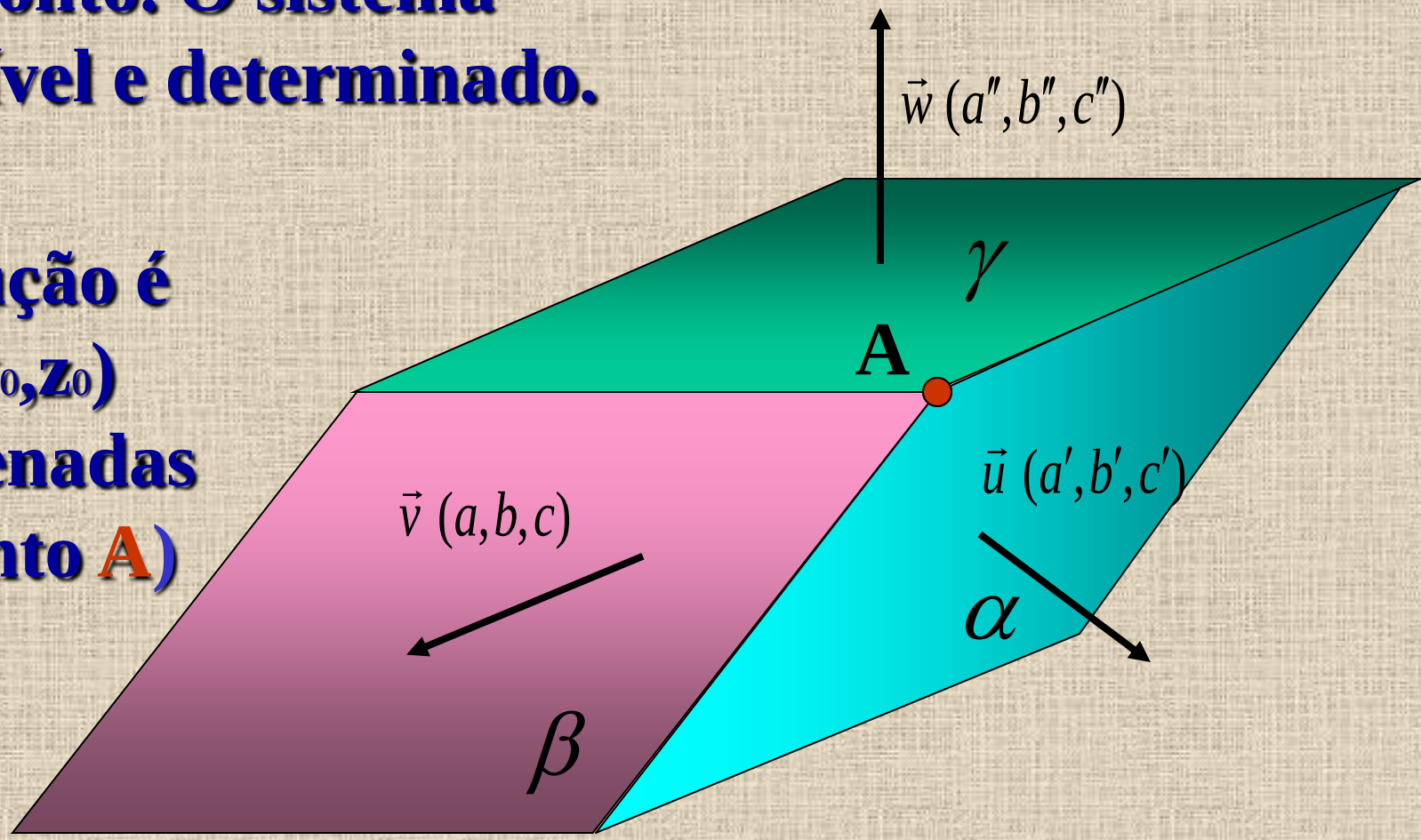


A solução é (x_0,y_0,z_0) (coordenadas do ponto A)

Jorge Freitas
ESAS 2006

Os 3 planos intersectam-se num ponto. O sistema é possível e determinado.

A solução é (x_0,y_0,z_0) (coordenadas do ponto A)



$\vec{v}$, $\vec{u}$ e $\vec{w}$ *não são colineares*

Jorge Freitas
ESAS 2006

Exemplo

$$\begin{cases} x+2y-z+6=0 \\ 3x+y+z=4 \\ x-3y-2z=1 \end{cases}$$

- **Os três planos intersectam-se num ponto.**
- **O sistema tem solução**

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=3 \end{cases}$$

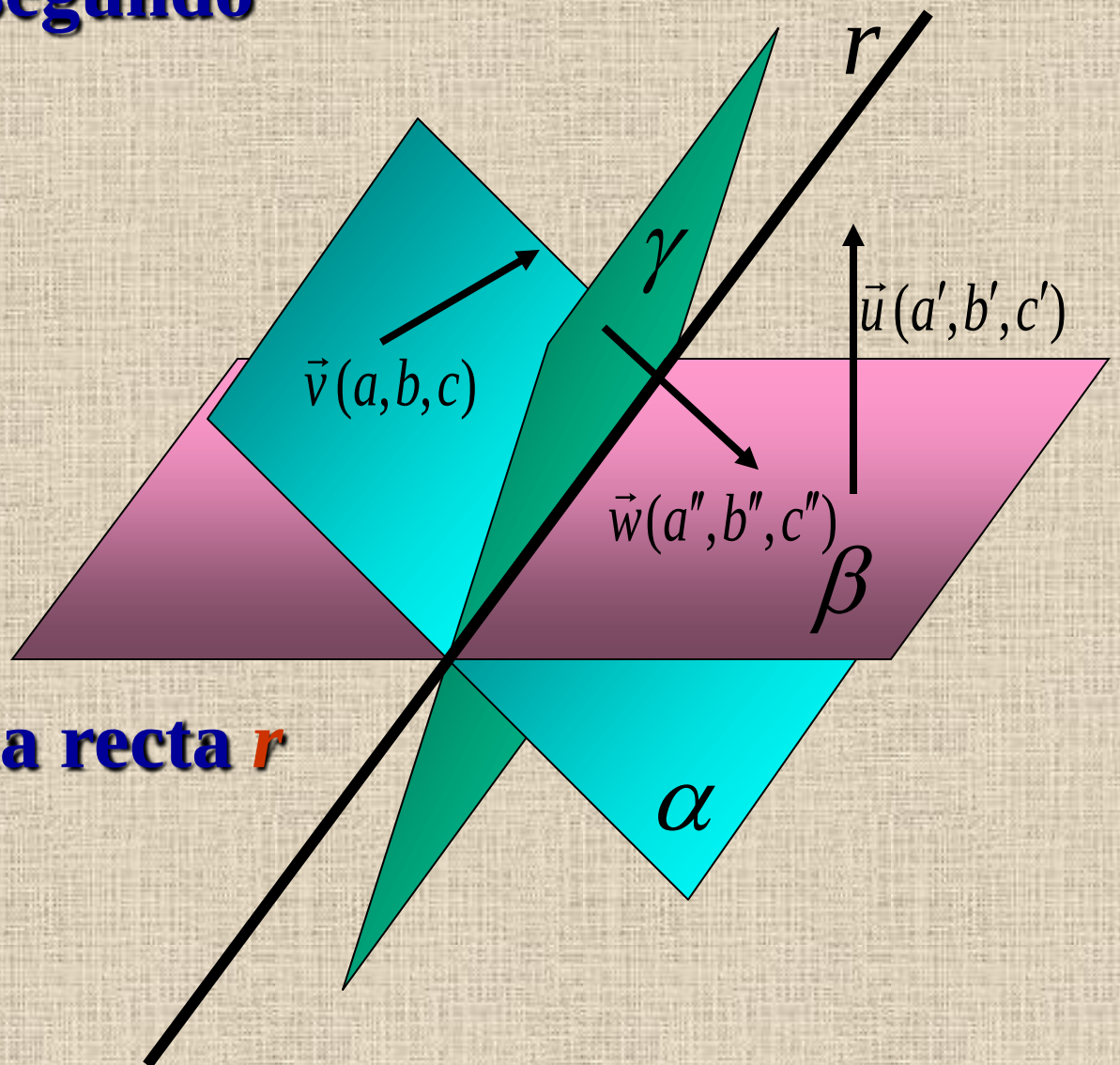
Resolver o sistema:

- **na calculadora**
- **método da substituição**
- **método da redução**

$\vec{v}, \vec{u}$ e $\vec{w}$

não são colineares

Os três planos intersectam-se segundo uma recta.
O sistema é possível e indeterminado.



As soluções são todos os pontos da recta *r*

Exemplo

$$\begin{cases} x+2y-3z=-6 \\ 2x-y-z=3 \\ x+y-2z=-3 \end{cases}$$

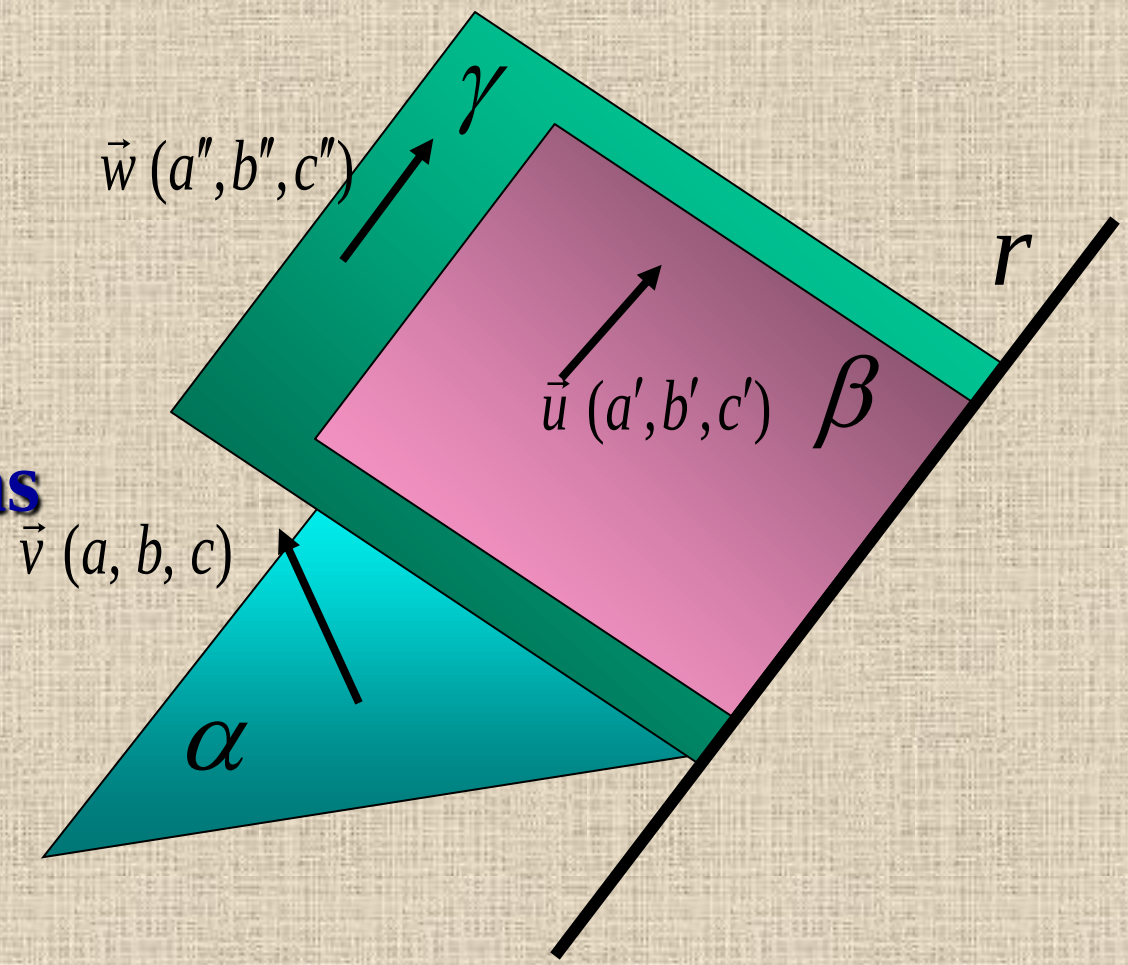
- **Os três planos intersectam-se numa recta.**
- **O sistema é indeterminado**

$$\begin{cases} z=x \\ z=y+3 \end{cases} \Leftrightarrow x=y+3=z \Leftrightarrow \frac{x-0}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-0}{1}$$

Consegue escrever-se uma das variáveis em função das outras

Dois dos planos são coincidentes.
O sistema é possível e indeterminado.

$\vec{u} // \vec{w}$



As soluções são as coordenadas de cada um dos pontos da recta *r*

Exemplo

$$\begin{cases} x+2y-3z=-6 \\ 2x+4y-6z=-12 \\ x+y-2z=-3 \end{cases}$$

- **Dois dos planos são coincidentes**
- **Os três planos intersectam-se numa recta.**
- **O sistema é indeterminado**

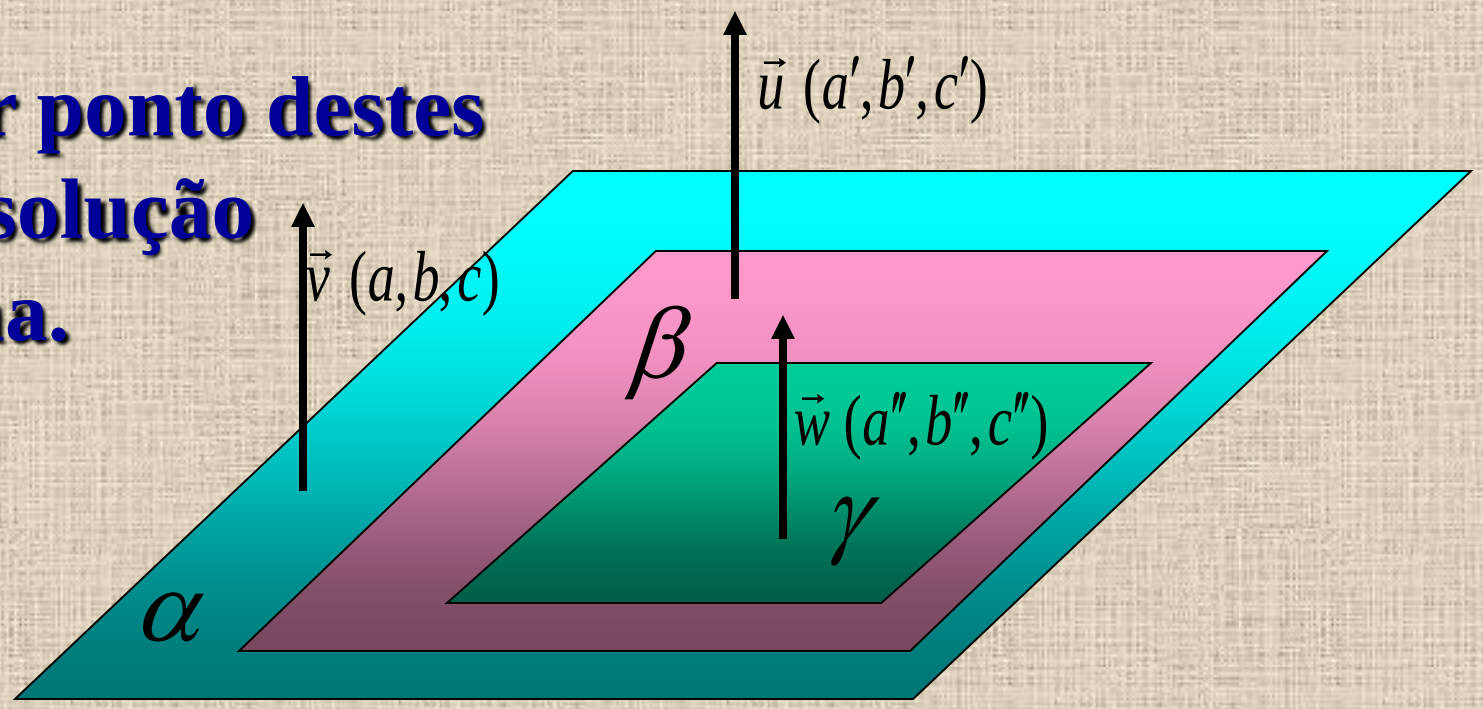
$$\begin{cases} z=x \\ z=y+3 \end{cases} \Leftrightarrow x=y+3=z \Leftrightarrow \frac{x-0}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-0}{1}$$

Os 3 planos são coincidentes

$$\vec{v} \,//\, \vec{u} \,//\, \vec{w}$$

O sistema é indeterminado

Qualquer ponto destes planos é solução do sistema.



Exemplo

$$\begin{cases} x+2y-3z=-6 \\ 2x+4y-6z=-12 \\ -x-2y+3z=6 \end{cases}$$

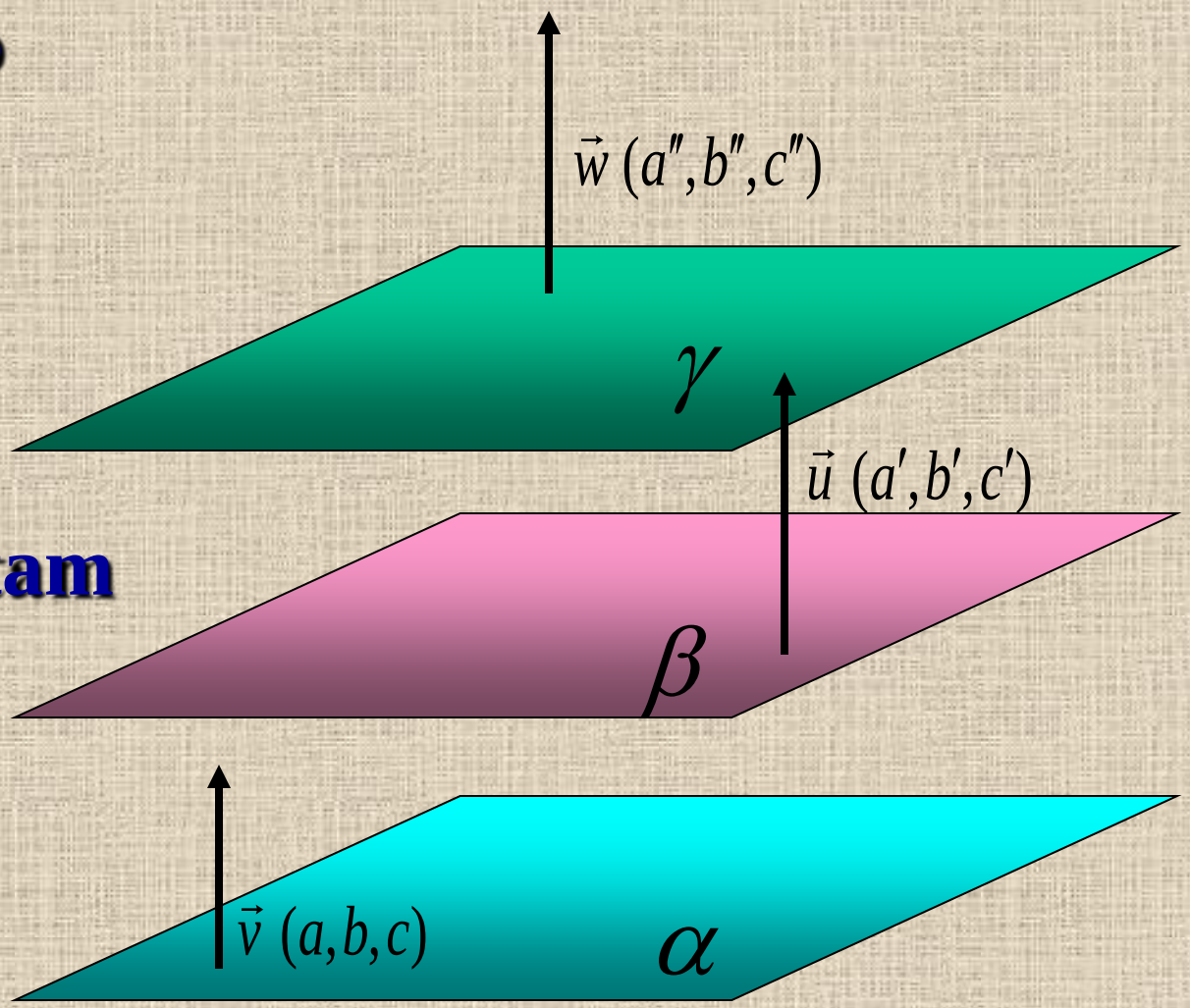
- **Os três planos são coincidentes**
- **Qualquer ponto de um dos planos pertence também aos outros planos**
- **O sistema é indeterminado**

$$\vec{v} \,//\, \vec{u} \,//\, \vec{w}$$

Os 3 planos são estritamente paralelos

Os planos não se intersectam

O sistema é impossível



Jorge Freitas
ESAS 2006

Exemplo

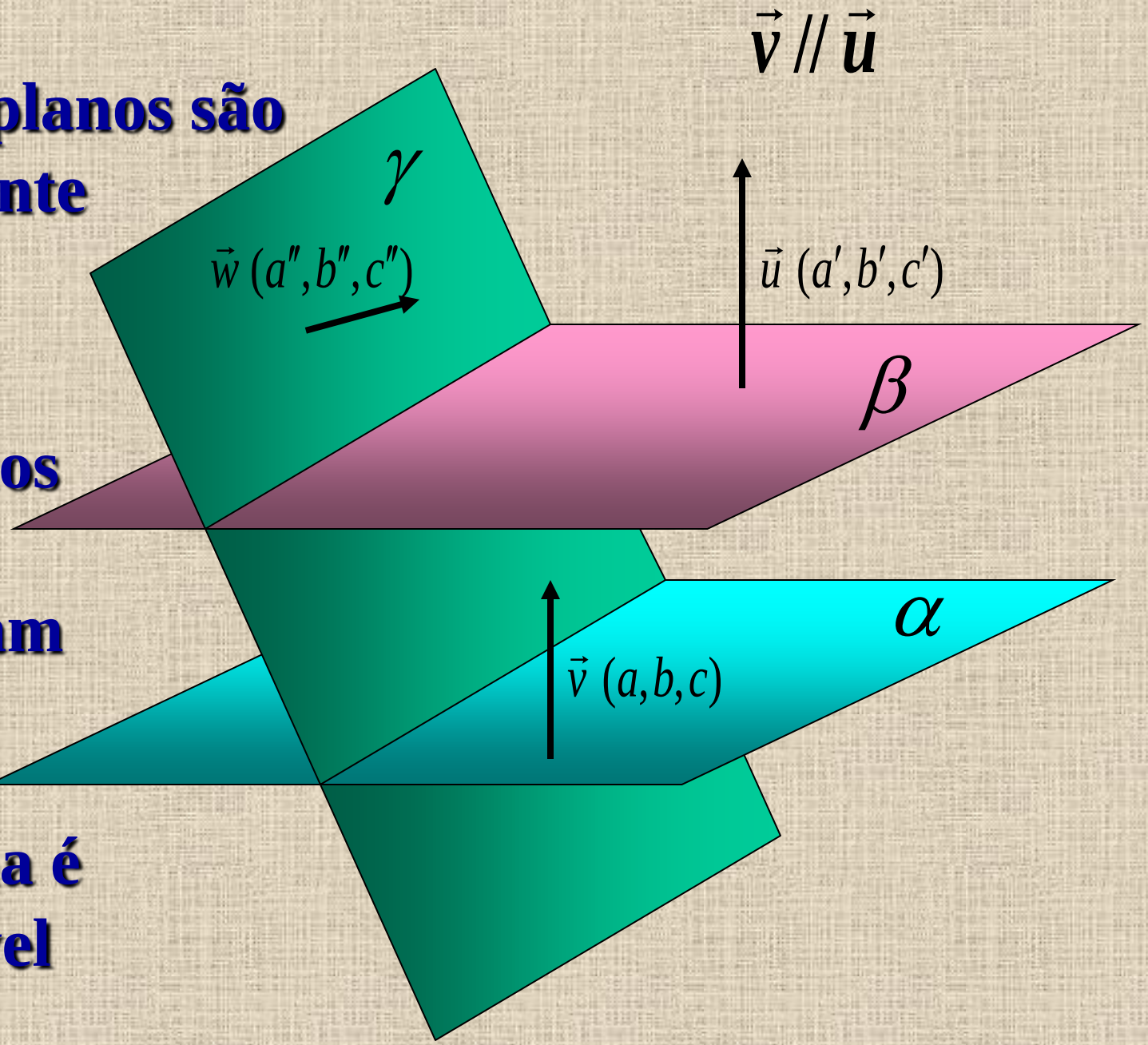
$$\begin{cases} x+2y-3z=-6 \\ x+2y-3z=0 \\ x+2y-3z=5 \end{cases}$$

- **Os três planos estritamente paralelos**
- **Os três planos nunca se interceptam**
- **O sistema é impossível**

Dois dos planos são estritamente paralelos

Os 3 planos não se intersectam

O sistema é impossível



Jorge Freitas
ESAS 2006

Exemplo

$$\begin{cases} x+2y-3z=-6 \\ -x-2y+3z=0 \\ 2x+y-3z=2 \end{cases}$$

- **Dois dos planos são estritamente paralelos**
- **O terceiro plano intersecta-os segundo rectas paralelas entre si**

$$\begin{cases} -x+y=-8 \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-8 \\ y=x-2 \end{cases}$$

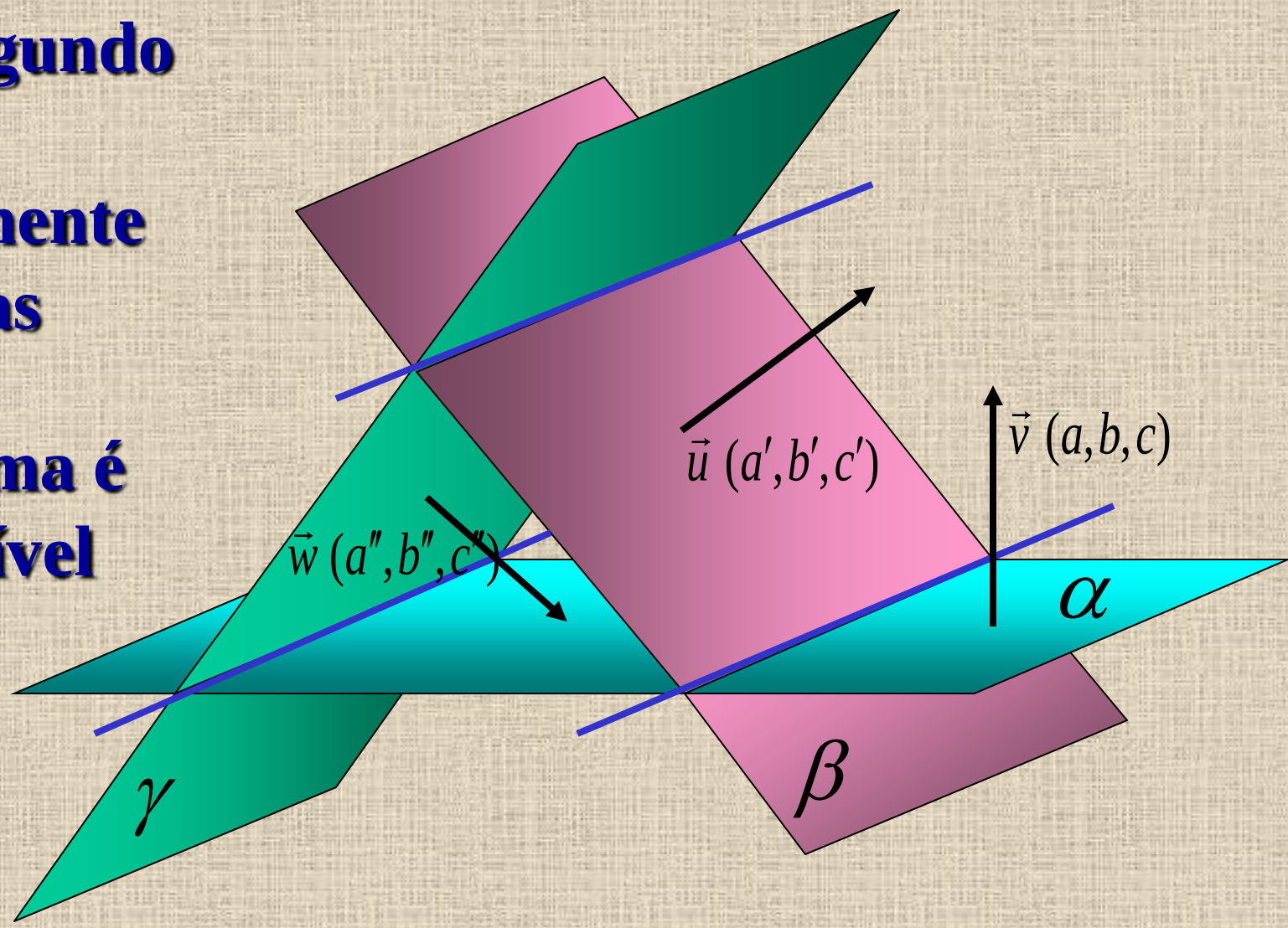
- **O sistema é impossível**

$\vec{v}, \vec{u}$ e $\vec{w}$

não são colineares

Os 3 planos intersectam-se 2 a 2 segundo rectas estritamente paralelas

O sistema é impossível



Jorge Freitas
ESAS 2006

Exemplo

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y=-1 \\ 3x+z=2 \end{cases}$$

- **Os três planos não são paralelos**
- **Os planos interceptam-se dois a dois segundo rectas paralelas**

$$\begin{cases} 3y+2z=-11 \\ 3y+2z=16 \\ 3y+2z=7 \end{cases}$$

- **O sistema é impossível**

F i m