INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL II

TAXAS DE VARIAÇÃO
DERIVADAS

ESC 09/10 PROF.ª:Mª JOÃO MENDES VIEIRA

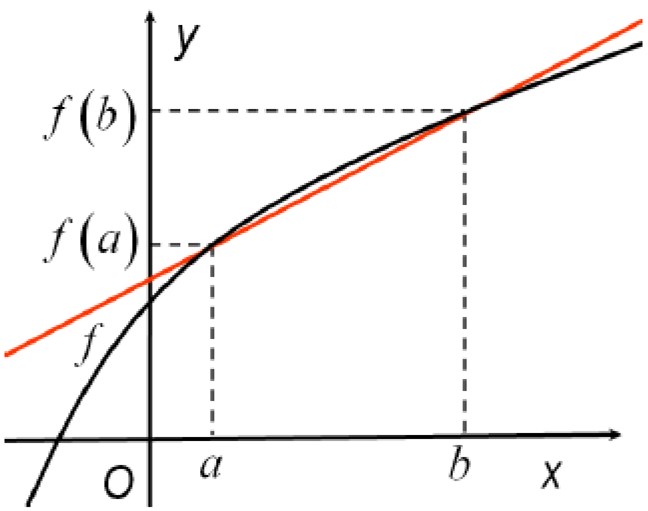
TAXA MÉDIA DE VARIAÇÃO

NUM DADO INTERVALO [a,b]

$$\text{TMV}_{[a,\, b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

<u>GEOMETRICAMENTE</u>

Declive da recta secante ao gráfico nos pontos de abcissa *a* e *b*.



$$TMV_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

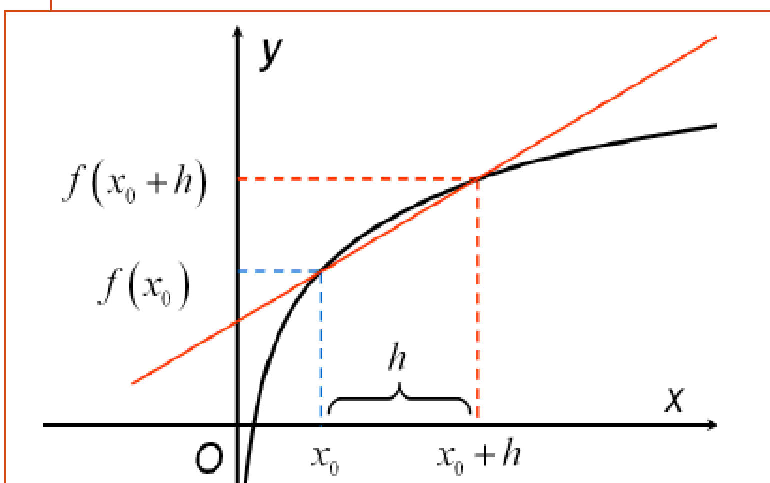
INSTANTÂNEA

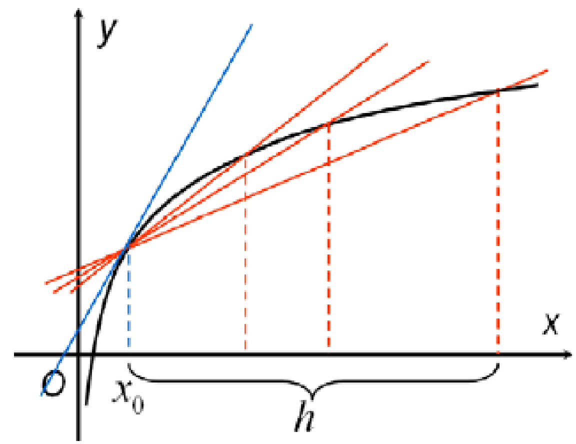
DERIVADA DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

<u>GEOMETRICAMENTE</u>

Declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$





$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

INSTANTÂNEA

DERIVADA DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO

Se $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, f diz-se derivável em x_0.

Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ (ou $-\infty$), f não é derivável em x_0 mas diz-se que a derivada de f em x_0 é $+\infty$ (ou $-\infty$) e escreve-se $f'(x_0) = +\infty$ (ou $f'(x_0) = -\infty$).

DERIVADAS LATERAIS DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO

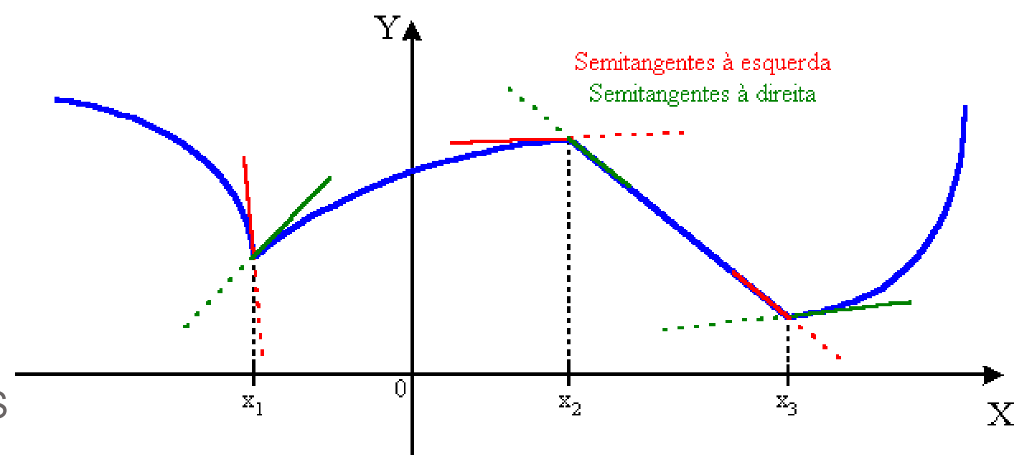
$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ é a derivada lateral direita em } x_0.$$

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ é a derivada lateral esquerda em } x_0.$$

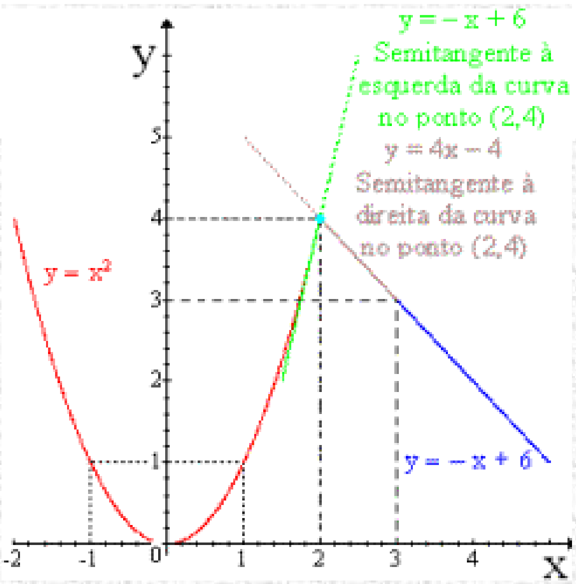
Se $f'(x_0^+) \neq f'(x_0^-)$, não existe $f'(x_0)$

x1, x2 e x3 são pontos angulosos

Nestes pontos não se pode falar em tangente ao gráfico, pois as semi-tangentes em cada um deles não estão no prolongamento uma da outra



EXEMPLO



Consideremos a função real de variável real definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x \leq 2 \\ -x + 6 \text{ se } x > 2 \end{cases}$

Vamos averiguar se a função admite derivada no ponto de abcissa 2.

Para tal, procuremos o $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

Ora este limite existe se e só se existirem e forem iguais os limites

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \text{ e } \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}.$$

É a estes limites laterais que se chama, respectivamente, ***derivada à direita*** e ***derivada à esquerda*** do ponto de abcissa 2.

Passemos então ao cálculo destes limites:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-x + 6 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-x + 2}{x - 2} = -1;$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} (x + 2) = 4.$$

A função não admite derivada no ponto de abcissa 2 pois, sendo diferentes estes limites, não existe $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

DERIVABILIDADE E CONTINUIDADE

TEOREMA

Se uma função tem derivada finita num ponto (derivável) então é contínua nesse ponto.

NOTA: O recíproco do Teorema não é verdadeiro, isto é, se uma função for contínua num ponto pode não ser derivável nesse ponto.

DERIVABILIDADE E CONTINUIDADE

<u>EXEMPLO</u> A função g está definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = |x+1|$

1. Mostrar que g é contínua no ponto de abcissa -1.

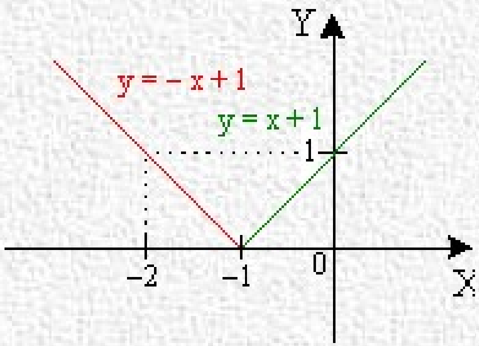
2. Averiguar se existe $g'(-1)$.

3. Representar, geometricamente, a função e confirmar as conclusões das alíneas anteriores.

1. $g(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1 \text{ se } x \geq -1 \\ -x-1 \text{ se } x < -1 \end{cases}$

Temos, então: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x+1) = 0 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (-x-1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} g(x) = 0.$

Como $g(-1) = 0$, $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = g(-1)$, e portanto, g é contínua no ponto de abcissa -1.



2. $g'(-1^+) = \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{g(x) - g(-1)}{x-(-1)} = \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x+1-0}{x+1} = 1;$

$g'(-1^-) = \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{g(x) - g(-1)}{x-(-1)} = \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{-x-1-0}{x+1} = -1.$

Como $g'(-1^+) \neq g'(-1^-)$, não existe $g'(-1)$

3. Por observação do gráfico conclui-se que a função g é contínua no ponto de abcissa -1, não existindo, no entanto, derivada no mesmo ponto (ponto anguloso); as derivadas à direita e à esquerda do ponto de abcissa -1 têm valores diferentes.

FUNÇÃO DERIVADA

Função derivada ou simplesmente derivada de uma função *f* é uma outra função:

- cujo domínio é o conjunto de todos os pontos em que *f* tem derivada finita;
- e que a cada ponto do seu domínio faz corresponder a derivada da função nesse ponto.

DERIVABILIDADE NUM INTERVALO

Uma função diz-se ***diferenciável*** num intervalo]a,b[quando admite derivada finita em todos os pontos desse intervalo.

E diz-se ***diferenciável*** num intervalo [a,b] quando é diferenciável em]a,b[e diferenciável à esquerda de b e à direita de a.

BIBLIOGRAFIA

- http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm13/document/derivada/deriva_5/deriva_5.htm
- Manual XeqMat , Texto Editora
- Manual Matemática 12º Ano, Texto Editora