TEMA: FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARITMICAS

1

Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das condições:

.1. $5^{x+1} = 625$

.2. $8^{2-3x} = 16$

.3. $3^{x^2+3} = 81$

.4. $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 39$

.5. $6^x + 6^{1-x} = 5$

.6. $2^{4x+8} \cdot 3^{4x-1} = 81 \times 16^{x+2}$

2

Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

.1. $3^x = 27$

.2. $7^{x-3} = 1$

.3. $2^x = \frac{1}{8}$

.4. $5^x = 15$

.5. $3^{4x+2} = 45$

.6. $5^{3-\frac{2}{x+1}} = 25$

.7. $7^{3-|x-1|} = \frac{1}{49}$

.8. $3^{2+4x} = 9^{3x-1}$

.9. $2^{x^2-4x+3} = 1$

.10. $3^{x^2} = 81$

.11. $3^{x^4-5x^2+4} = 1$

12. $2^{x^2-5x} = \frac{1}{64}$

3

Determine o conjunto-solução de cada uma das equações:

.1. $5^{3x-2} = 25^{x^2-2}$

.2. $4^x - 6 \cdot 2^{x+1} + 36 = 0$

.3. $3 \cdot 4^{x+1} - 5 \cdot 2^{x-1} = 182$

.4. $1 + 3 + 9 + \ldots + 3^x = 121$

.5. $\dfrac{4e^{2x} - 4e^x - 3}{x^4 + 2} = 0$

.6. $e^{-x} - 3e^x + 2 = 0$

.7. $2^x + 3 \cdot 2^x + 32 = 8 \cdot 2^x$

.8. $3^{2-x} + 2 \cdot 3^{3-x} = 7$

.9. $2^{x+2} + 4^{x+1} - 24 = 0$

.10. $a^{6x+2} - a^{3x+1} = 0$, $a > 1$

4

Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto-solução de cada uma das condições:

.1. $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} > 117$

.2. $2e^x < 5$

.3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2}$

5

Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das condições:

.1. $e^{2x} < 5$

.2. $3^{3x+1} > 9^{x-1}$

.3. $25^x - 5^{x+1} + 6 < 0$

.4. $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^{4x} + 4^{2x} + 12 > 0$

.5. $\sqrt[4]{8^{3x}} < \sqrt{2^{-x+3}}$

.6. $\dfrac{x^2 + 4}{3^x + 3^{-x+2} - 10} < 0$

6

Aplicando a definição de logaritmo, determine o valor de x de modo que:

.1. $\log_x 81 = 2$

.2. $\log_x \sqrt{8} = \frac{3}{2}$

.3. $\log_{x+2} 64 = 2$

.4. $\log_{243} x = \frac{1}{5}$

.5. $\log_5 (4 + x) = 2$

7

Simplifique cada uma das expressões:

.1. $e^{x+\ell n 3} \cdot \ell n\,(e^2)$

.2. $10 - 4^{\log_{10} 5}$

.3. $4^{2\log_4 (x+1) - \log_4 x}$

.4. $\ell n\,(e^{x-1}) \cdot \ell n\,(e^3)$

.5. $3^{\log_3 4} \cdot \log_3 (3^{x^2-1})$

8

Prove que:

.1. $4^{\log_4 x + 1} = 4x$

.2. $3^{2 - \log_3 x} = \frac{9}{x}$

.3. $7^{3\log_7 x^2 - 2\log_7 y} = \frac{x^6}{y^2}$

.4. $(4 \times 16)^{\log_{\sqrt{2}} x} = x^{12}$

9

Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das equações:

.1. $(x-2)^2 = \log_2 512$

.2. $\log_{x^3}\left(\frac{1}{27}\right) = -1$

.3. $\log_2 \frac{1}{16} = x$

.4. $\log_{x^2} \frac{1}{16} = -1$

10

Determine os valores reais de x que verificam cada uma das condições:

.1. $\log_{\sqrt{3}} (2x) = -2$

.2. $\log (x^2) - \log 2 = \log x + \log 3$

.3. $2\log x = 4 + \log \frac{x}{e}$

.4. $x \log_2 (10 - 2x) - \log_2 2 \times \log_2 (10 - 2x) > 0$

11

Determine o conjunto de valores de x que verificam as igualdades:

.1. $\log_2 x = 1 + \log_2 (3 - x)$

.2. $\ell n\,(x-3) + \ell n\,(x+1) = 0$

.3. $\ell n\,(x) - 3\log_e 2 = \log_e 6 - \ell n\,(x+2)$

.4. $\log_3 (2x) - \log_3 (2x+1) = 1$

.5. $\ell n\,(x) + \ell n\,2 = \ell n\,4 + 1$

.6. $\ell n\,(4-x) = \ell n\,(x) - 2$

.7. $\ell n\,(x-1) + \ell n\,6 = \ell n\,(x+1) + \ell n\,3$

12

Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das condições:

.1. $\log_2 (6-x) > 1$

.2. $(\log_3 x)^2 + \log_3 x - 6 > 0$

.3. $\log_3 (3-x) < \log_3 (x+1) - 3$

.4. $\frac{4(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x - 3}{e^{6x} + 4} < 0$

13

Determine o domínio e o contradomínio de cada uma das funções:

.1. $x \mapsto f(x) = 1 + \log_2(x+1)$ **.2.** $x \mapsto g(x) = 2 + \log(1 - x^2)$

14

Caracterize a função inversa de cada uma das funções assim definidas:

.1. $x \mapsto f(x) = 1 + 2^{x-1}$

.2. $x \mapsto g(x) = e^{\frac{1}{x+3}}$

15

Caracterize a função inversa de cada uma das funções definidas pelas expressões:

.1. $f(x) = 1 - 3^{x+2}$ **.3.** $f(x) = 2^{-x-4} + 3$

.2. $f(x) = e^{2x-1} + 1$ **.4.** $f(x) = 1 + 2^{-3+x}$

16

Tendo em conta que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^p}{a^x} = 0$, $a > 1$, $p \in \mathbb{R}$, determine cada um dos seguintes limites:

.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-x} \cdot x)$ **.4.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3}{3^x}$ **.6.** $\lim\limits_{x \to +\infty} (x \cdot 4^{-x})$

.2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^{x-3}}{(x-3)}\right)$ **.5.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\pi^x}{x}$ **.7.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-4}{e^{2x}}$

.3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4e^{3x} - e^{2x}}{x \cdot e^{2x}}$

17

Partindo do conhecimento de que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, calcule cada um dos limites:

.1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{7x} - 1}{x}$ **.3.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{1 - e^{x^3}}$ **.5.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$

.2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x+4} - e^4}{x}$ **.4.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{1 - e^{4x}}$ **.6.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - e^x + 4x}{e^{2x} - 1}$

18

Calcule cada um dos limites:

.1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1+3x)}{x}$ **.3.** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\log x}{x^2 - 1}$

.2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{\ell n(1+4x)}$ **.4.** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x^2}{\log(2-x)}$

19

Prove que:

1. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\log(x-2)}{x-3} = 1$ **.4.** $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\log(x-3)}{x^2 - 2x - 8} = \dfrac{1}{5}$

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\log(x+4) - \log 5}{x-1} = \dfrac{1}{5}$ **.5.** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\log(2x-1)^3}{x^2 + x - 2} = 2$

.3. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\log x - \log 3}{x-3} = \dfrac{1}{3}$

Soluções

1
1) 3 2) $2/9$ 3) $1; -1$ 4) 2 5) $\log_6 3 ; \log_6 2$
6) $5/4$

2
1) 3 2) 3 3) -3 4) $1+\log_5 3$ 5) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_3 45$
6) 1 7) $6; -4$ 8) 2 9) $1; 3$ 10) $2; -2$
11) $\pm 1, \pm 2$ 12) $2; 3$

3
1) $2; -0{,}5$ 2) $\log_2 6$ 3) 2 4) 5 5) $\log 3/2$ 6) 0
7) 3 8) 2 9) 1 10) $-1/3$

4
1) $]2, +\infty[$ 2) $]-\infty; \ln 5/2[$ 3) $]-\infty; 1-\sqrt{5}[\cup]1+\sqrt{5}, +\infty[$

5
1) $]-\infty; \ln 5/2[$ 2) $]-3, +\infty[$ 3) $]\log_5 2 ; \log_5 3[$
4) $]-\infty, 1/2[$ 5) $]-\infty; 6/11[$ 6) $]0, 2[$

6
1) 9 2) 2 3) 6 4) 3 5) 21

7
1) $2 \cdot 3^x$ 2) $1/625$ 3) $\frac{(x+1)^2}{x}$ 4) $3(x-1)$
5) $4(x^2-1)$

9
1) $x=5$ 2) $x=3$ 3) $x=-4$ 4) $x=\pm 4$

10
1) $1/6$ 2) 6 3) e^3 4) $]1; 9/2[$

11
1) $\{2\}$ 2) $\{1+\sqrt{5}\}$ 3) $\{6\}$ 4) Impossível 5) $\{2e\}$
6) $\left\{\frac{4e^2}{1+e^2}\right\}$ 7) $\{3\}$

12 1) $x < 4$ 2) $x > 9$ 3) $\left]\frac{20}{7} ; 3\right[$

4) $\left]\frac{\sqrt{2}}{2} , 2\sqrt{2}\right[$

13 1) $D =]-1,+\infty[$; $D' = \mathbb{R}$

2) $D =]-1;1[$; $D' =]-\infty, 2[$

14 1) $f^{-1} :]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto 1 + \log_9 (x-1)$

2) $g^{-1} :]0,1[\cup]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto -3 + \dfrac{1}{\ln x}$

15 1) $D =]-\infty, 1[$ $f^{-1}(x) = -2 + \log_3 (1-x)$

2) $D =]1,+\infty[$ $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log (x-1)$

3) $D =]3,+\infty[$ $f^{-1}(x) = -4 - \log_2 (x-3)$

4) $D =]1,+\infty[$ $f^{-1}(x) = 3 + \log_2 (x-1)$

16 1) 0 2) $+\infty$ 3) $+\infty$ 4) 0 5) $+\infty$ 6) 0 7) 0

17 1) 7 2) e^4 3) -1 4) $-3/4$ 5) 2 6) 3

18 1) 3 2) $1/2$ 3) $1/2$ 4) 2

19

1) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\log (x-2)}{x-3} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\log (y+1)}{y} = 1$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\log\left(\frac{x+4}{5}\right)}{x-1} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y}{5e^y - 5} = \dfrac{1}{5}$

3) $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y}{3e^y - 3} = \dfrac{1}{3}$

4) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\log (x-3)}{(x-4)(x+2)} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y}{(e^y - 1)(e^y + 5)} = \dfrac{1}{5}$

5) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3 \log (2x-1)}{(x-1)(x+2)} =$