Prova Escrita de Matemática A

12.º ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase 12 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos

2008

VERSÃO 1

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova.

A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente elaboradas a lápis, sendo, a seguir, passadas a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e/ou dos itens, bem como as respectivas respostas.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de **escolha múltipla**, escreva, na folha de respostas,

- o **número** do item;
- a **letra identificativa** da alternativa correcta.

Não apresente cálculos, nem justificações.

Nos itens de resposta aberta com cotação igual ou superior a 15 pontos e que impliquem a produção de um texto, o domínio da comunicação escrita em língua portuguesa representa cerca de 10% da cotação.

As cotações dos itens encontram-se na página 12.

A prova inclui um Formulário na página 4.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$
(r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = \mathrm{x}_1 \mathrm{p}_1 + \cdots + \mathrm{x}_\mathrm{n} \mathrm{p}_\mathrm{n}$

$\sigma = \sqrt{(\mathrm{x}_1 - \mu)^2 \mathrm{p}_1 + \cdots + (\mathrm{x}_\mathrm{n} - \mu)^2 \mathrm{p}_\mathrm{n}}$

Se X é $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, então:

$\mathrm{P}(\mu - \sigma < \mathrm{X} < \mu + \sigma) \approxeq 0{,}6827$

$\mathrm{P}(\mu - 2\sigma < \mathrm{X} < \mu + 2\sigma) \approxeq 0{,}9545$

$\mathrm{P}(\mu - 3\sigma < \mathrm{X} < \mu + 3\sigma) \approxeq 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -\,u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u) = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

- Os oito itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. O João e a Maria convidaram três amigos para irem, com eles, ao cinema. Compraram cinco bilhetes com numeração seguida, numa determinada fila, e distribuíram-nos ao acaso.

Qual é a probabilidade de o João e a Maria ficarem sentados um ao lado do outro?

(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{2}{5}$ **(C)** $\frac{3}{5}$ **(D)** $\frac{4}{5}$

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega \text{ e } B \subset \Omega)$. Sabe-se que:

- $P(A \cup B) = 80\%$
- $P(B) = 60\%$
- $P(A \cap B) = 10\%$

Qual é o valor de $P(A)$?

(P designa probabilidade).

(A) 10% **(B)** 20% **(C)** 30% **(D)** 40%

3. Admita que a variável peso, expressa em gramas, das maçãs de um pomar é bem modelada por uma distribuição normal N $(60;\,5)$, em que 60 é o valor médio e 5 é o valor do desvio-padrão da distribuição.

Retira-se, ao acaso, uma dessas maçãs.

Considere os acontecimentos:

A : «o peso da maçã retirada é superior a 66 gramas»

B : «o peso da maçã retirada é inferior a 48 gramas»

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{B})$ **(B)** $P(\mathrm{A}) < P(\mathrm{B})$

(C) $P(\mathrm{B}) < P(\mathrm{A})$ **(D)** $P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) = 1$

4. Seja a um número real maior do que $1.$

Qual dos seguintes valores é igual a $2\log_a\left(a^{\frac{1}{3}}\right)$?

(A) $-\frac{2}{3}$ **(B)** $-\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{2}{3}$

5. Na figura 1, está representada parte do gráfico de uma função f de domínio $]-\infty, 2[$.

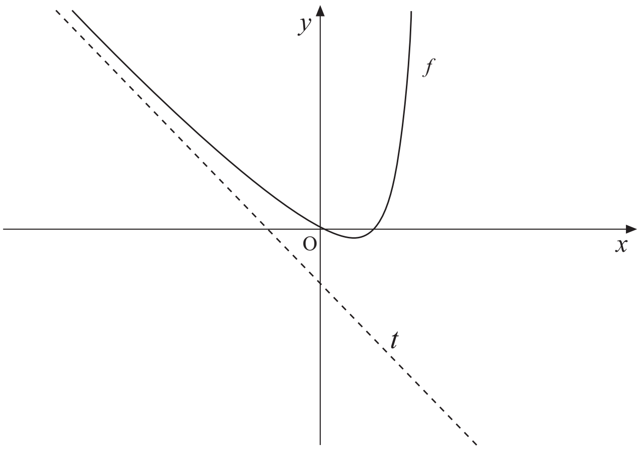


Fig. 1

A recta t, de equação $y = -x - 1$, é assimptota do gráfico de f quando x tende para $-\infty$.

Qual é o valor do $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) + x + 1\right)$?

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

6. A figura 2 representa parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$.

Em qual das figuras seguintes pode estar parte da representação gráfica de f', derivada de f?

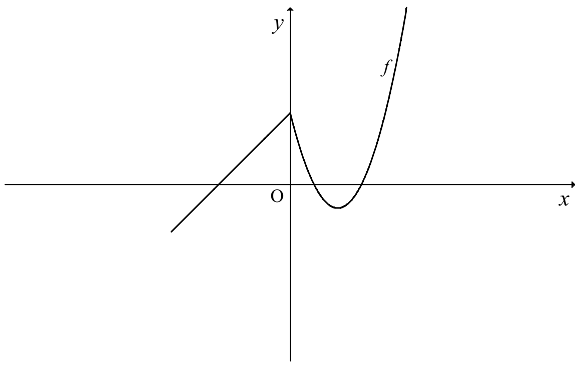
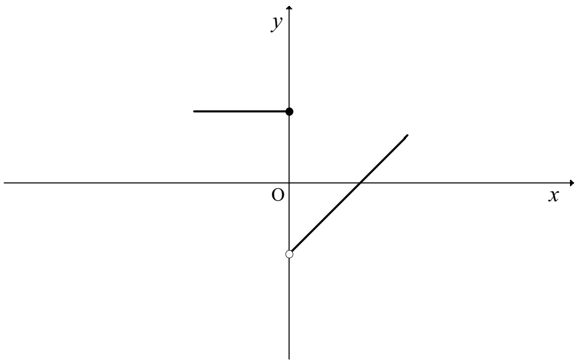
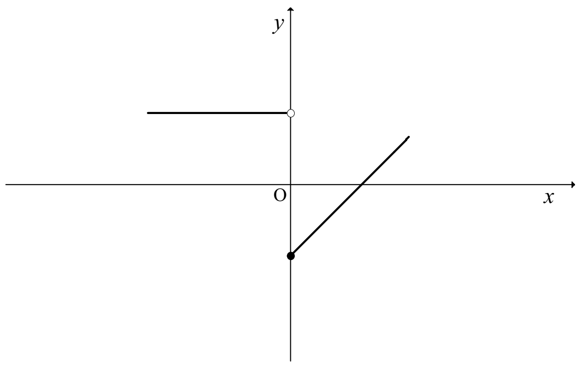


Fig. 2

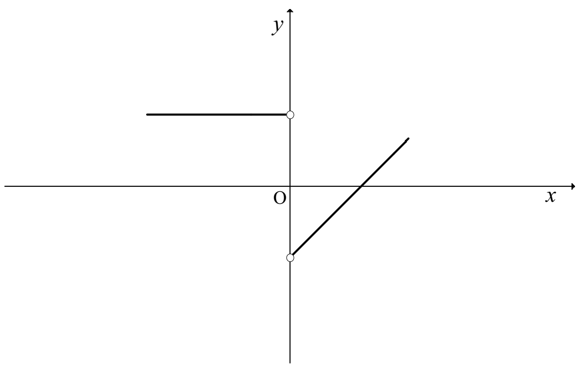
(A)



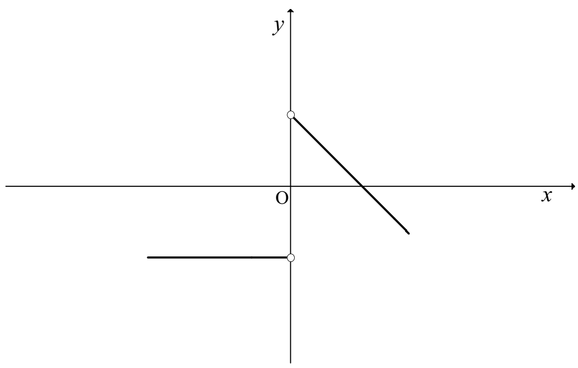
(B)



(C)



(D)



7. Seja $z = 3i$ um número complexo.

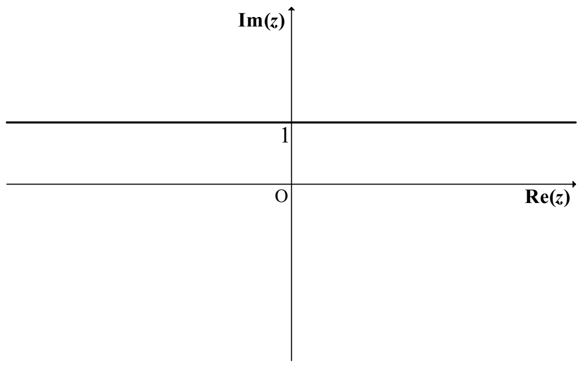
Qual dos seguintes valores é um argumento de z?

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{2}\pi$ **(C)** π **(D)** $\frac{3}{2}\pi$

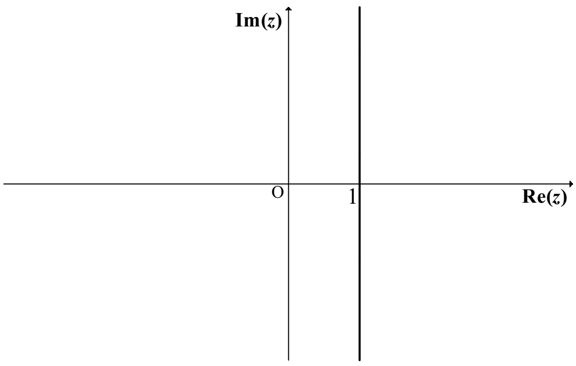
8. Considere, em $\mathbb{C}$, a condição $z + \bar{z} = 2$.

Em qual das figuras seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definidos por esta condição?

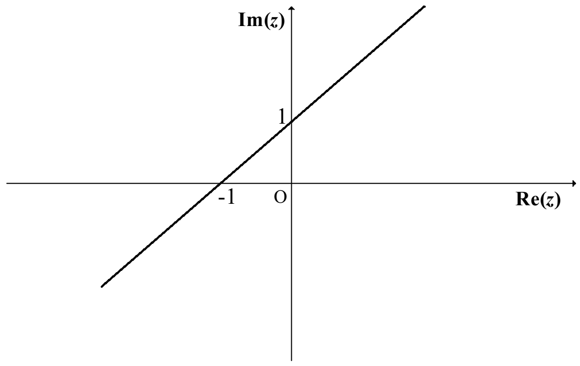
(A)



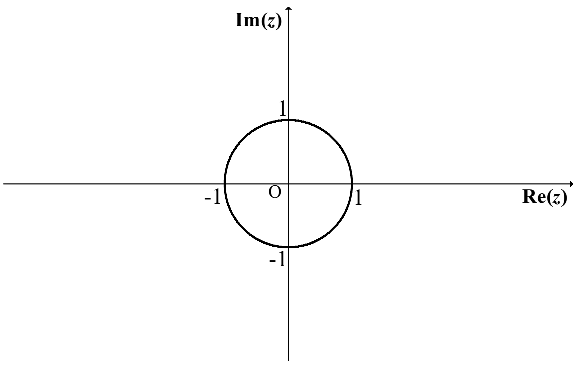
(B)



(C)



(D)



GRUPO II

Na resposta a itens deste grupo, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - \sqrt{3}\, i$ e $z_2 = 8 \operatorname{cis} 0$

(i designa a unidade imaginária).

1.1. Mostre, **sem recorrer à calculadora**, que $(-z_1)$ é uma raiz cúbica de z_2.

1.2. No plano complexo, sejam A e B as imagens geométricas de z_1 e de $z_3 = z_1 .\, i^{46}$, respectivamente.

Determine o comprimento do segmento $[AB]$.

2. Uma turma do 12.º ano de uma Escola Secundária está a organizar uma viagem de finalistas.

2.1. Os alunos da turma decidiram vender rifas, para angariarem fundos para a viagem.
A numeração das rifas é uma sequência de três algarismos (como, por exemplo, 099), iniciando-se em 000.
De entre as rifas, que foram todas vendidas, será sorteada uma, para atribuir um prémio.

Qual é a probabilidade de a rifa premiada ter um único algarismo cinco?

Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às centésimas.

2.2. A turma é constituída por doze raparigas e dez rapazes, que pretendem formar uma comissão organizadora da viagem. Sabe-se que a comissão terá obrigatoriamente três raparigas e dois rapazes. A Ana e o Miguel, alunos da turma, não querem fazer parte da comissão em simultâneo.
Explique, numa composição, que o número de comissões diferentes que se pode formar é dado por:

$$^{12}C_3 \times {}^{10}C_2 - {}^{11}C_2 \times 9$$

3. Em duas caixas, A e B, introduziram-se bolas indistinguíveis ao tacto:

- na caixa A: algumas bolas verdes e algumas bolas azuis;
- na caixa B: três bolas verdes e quatro azuis.

Retira-se, ao acaso, uma bola da caixa A e coloca-se na caixa B. De seguida, retira-se, também ao acaso, uma bola da caixa B.

Sabendo que a probabilidade de a bola retirada da caixa B ser azul é igual a $\frac{1}{2}$, mostre que a bola que foi retirada da caixa A e colocada na caixa B tinha cor verde.

4. Seja f a função de domínio $\left[-\pi, +\infty\right[$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-4x+1} & \text{se } \ x \geq 0 \\ \dfrac{3\,\mathrm{sen}\,(x)}{x^2} & \text{se } \ -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados, escrevendo as suas equações, caso existam.

5. Considere, num referencial ortonormado xOy, os gráficos das funções f e g, de domínio $[0, 3]$, definidas por $f(x) = \ln(x+2)$ e $g(x) = e - e^{x-1}$

($\ln$ designa logaritmo de base e).

Determine a **área de um triângulo $[OAB]$**, com aproximação às décimas, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**.

Para construir o triângulo $[OAB]$, percorra os seguintes passos:

- visualize as curvas representativas dos gráficos das duas funções, **no domínio indicado**;
- reproduza, na sua folha de respostas, o referencial e as curvas visualizadas na calculadora;
- assinale, ainda:
  - a origem O do referencial;
  - o ponto A de intersecção do gráfico das duas funções, indicando as suas coordenadas, com aproximação às décimas;
  - o ponto B de intersecção do gráfico da função g com o eixo Ox.

6. Seja h a função de domínio $]-1, +\infty[$, definida por $h(x) = 4 - x + \ln(x+1)$

($\ln$ designa logaritmo de base e).

Resolva, **usando métodos analíticos**, os dois itens seguintes.

Nota:

A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use, pelo menos, duas casas decimais.

6.1. Estude a função h, quanto à monotonia, no seu domínio.

Indique os intervalos de monotonia e, se existir algum extremo relativo, determine-o.

6.2. Justifique, aplicando o **Teorema de Bolzano**, que a função h tem, pelo menos, um zero no intervalo $]5, 6[$.

7. Num determinado dia, um grupo de amigos decidiu formar uma associação desportiva.
Admita que, t dias após a constituição da associação, o número de sócios é dado, aproximadamente, por:

$$N(t) = \frac{2000}{1 + 199e^{-0{,}01\,t}} \quad , \quad t \geq 0$$

Resolva, **usando métodos analíticos**, os dois itens seguintes.

Nota:

A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use aproximações às milésimas.

7.1. Determine $N(0)$ e $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t)$.

Interprete os valores obtidos, no contexto do problema.

7.2. Ao fim de quantos dias se comemorou a inscrição do sócio número 1000?

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I	(8 × 5 pontos)		**40 pontos**
GRUPO II			**160 pontos**
1.		30 pontos	
1.1.	15 pontos		
1.2.	15 pontos		
2.		30 pontos	
2.1.	15 pontos		
2.2.	15 pontos		
3.		15 pontos	
4.		15 pontos	
5.		15 pontos	
6.		30 pontos	
6.1.	15 pontos		
6.2.	15 pontos		
7.		25 pontos	
7.1.	10 pontos		
7.2.	15 pontos		
TOTAL			**200 pontos**

Ministério da Educação
GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL
EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO
Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Prova Escrita de Matemática A

12.º ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase

12 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos

2008

COTAÇÕES

GRUPO I .... (8 × 5 pontos) .... **40 pontos**

GRUPO II .... **160 pontos**

1.		30 pontos
1.1.	15 pontos	
1.2.	15 pontos	
2.		30 pontos
2.1.	15 pontos	
2.2.	15 pontos	
3.		15 pontos
4.		15 pontos
5.		15 pontos
6.		30 pontos
6.1.	15 pontos	
6.2.	15 pontos	
7.		25 pontos
7.1.	10 pontos	
7.2.	15 pontos	

TOTAL .... **200 pontos**

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO DA PROVA

As classificações a atribuir às respostas são expressas em números inteiros não negativos.

Itens de resposta fechada de escolha múltipla

As respostas em que é assinalada a alternativa correcta são classificadas com a cotação total do item. As respostas incorrectas são classificadas com zero pontos. Não há lugar a classificações intermédias.

Itens de resposta aberta

Os critérios de classificação destes itens apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

Os critérios de classificação dos itens de resposta aberta extensa orientada apresentam-se organizados por níveis de desempenho. Nestes itens, desde que tenham cotação igual ou superior a quinze pontos e impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa.

A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização é cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho a seguir descritos:

Nível	Descritor
3	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique a perda de inteligibilidade e/ou de rigor de sentido.
2	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou ortografia, cuja gravidade não implique a perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
1	Composição sem estruturação aparente, com a presença de erros graves de sintaxe, pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No quadro seguinte, apresentam-se critérios de classificação a aplicar às respostas aos itens em situações não consideradas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Engano na identificação do item a que o examinando está a responder. 2. Omissão da identificação do item a que o examinando está a responder.	Deve ser vista e classificada a resposta se, pela resolução apresentada, for possível identificar inequivocamente o item.
3. É apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item e o examinando não indica, de forma inequívoca, aquela que pretende que seja classificada.	Deve ser vista e classificada apenas a resposta que surge em primeiro lugar, na folha de respostas.
4. É apresentado apenas o resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	A resposta deve ser classificada com zero pontos.
5. Ilegibilidade da resposta.	A resposta deve ser classificada com zero pontos.
6. Item com etapas.	A cotação indicada para cada etapa é a classificação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta ao item resulta da soma das classificações das diferentes etapas, à qual, eventualmente, se subtrai um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 16 e 21.
7. Etapa com passos.	A cotação indicada para cada passo é a classificação máxima que lhe é atribuível. A classificação da etapa resulta da soma das classificações dos diferentes passos.
8. Item ou etapa com classificação por níveis de desempenho.	O classificador deve enquadrar a resposta do examinando numa das descrições apresentadas, não podendo atribuir uma classificação diferente das indicadas.
9. Utilização de processos de resolução do item que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «usando métodos analíticos»].	São classificadas com zero pontos as etapas em que a instrução não foi respeitada e todas as etapas subsequentes que delas dependam.
10. Utilização de processos de resolução do item não previstos nos critérios específicos.	Deve ser aceite qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nos critérios específicos de classificação ou no programa. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante a distribuição da cotação do item pelas etapas percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.

Situação	Classificação
11. Não são apresentadas, explicitamente, todas as etapas, mas a resolução apresentada permite perceber, inequivocamente, que elas foram percorridas.	A(s) etapa(s) implícita(s) é(são) classificada(s) com a cotação total para ela(s) prevista.
12. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, deve subtrair-se um ponto à classificação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a classificação máxima a atribuir a essa etapa não deve ser superior a 50% da cotação prevista.
13. Erro ocasional num cálculo.	Deve subtrair-se um ponto à classificação da etapa em que ocorre o erro.
14. Erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A classificação máxima a atribuir a essa etapa não deve ser superior a 50% da cotação prevista para a mesma.
15. Erro na resolução de uma etapa.	A resolução dessa etapa é classificada de acordo com o erro cometido. Se o erro não diminuir o grau de dificuldade das etapas subsequentes, estas são classificadas de acordo com os critérios de classificação. Se o erro diminuir o grau de dificuldade das etapas subsequentes, a classificação máxima a atribuir a essas etapas não deve ser superior a 50% da cotação prevista.
16. Em cálculos intermédios, é pedida uma aproximação com um certo número de casas decimais. O examinando não respeita o pedido e/ou os arredondamentos estão incorrectos.	Deve subtrair-se um ponto à classificação total da resposta.
17. A apresentação do resultado final não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção e o examinando escreve na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros e o examinando apresenta-o em metros].	Deve subtrair-se um ponto à classificação da etapa correspondente ao resultado final.
18. Na apresentação do resultado final, não está expressa a unidade de medida [exemplo: «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa ao resultado final é classificada como se a unidade de medida estivesse indicada.

Situação	Classificação
19. O resultado final é apresentado com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	Deve subtrair-se um ponto à classificação da etapa correspondente ao resultado final.
20. O resultado final apresenta um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou está incorrectamente arredondado.	Deve subtrair-se um ponto à classificação da etapa correspondente ao resultado final.
21. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	Deve subtrair-se um ponto à classificação total da resposta, excepto: – se as incorrecções ocorrerem apenas em etapas já classificadas com zero pontos; – no caso de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a **8.** .... (8 × 5 pontos)... **40 pontos**

As respostas correctas são as seguintes:

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	C	C	D	B	C	B	B
Versão 2	C	B	B	A	C	B	C	C

GRUPO II

É de aceitar qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos ou no programa (ver critério 10 dos critérios gerais).

1.1. .... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

<u>1.º processo</u>

Calcular $(-z_1)$ na forma algébrica .... 1 ponto

Concluir que $(-z_1) = \sqrt[3]{z_2} \Leftrightarrow (-z_1)^3 = z_2$ .... 2 pontos

Calcular $(-z_1)^3$ na forma algébrica .... 10 pontos

$(-1+\sqrt{3}\ i)^3 = (-1+\sqrt{3}\ i)^2 \times (-1+\sqrt{3}\ i)$ .... 2 pontos

Quadrado do binómio .... 4 pontos

Multiplicação .... 4 pontos

ou

Desenvolver a potência utilizando o Binómio de Newton ...... 5 pontos

Restantes cálculos .... 5 pontos

Concluir que $8 = 8 \text{ cis } 0$ .... 2 pontos

<u>2.º processo</u>

Calcular $(-z_1)$ na forma trigonométrica .... 7 pontos

Calcular $(-z_1)$ na forma algébrica .... 1 ponto

Módulo de $(-z_1)$ .... 2 pontos

Argumento de $(-z_1)$ .... 3 pontos

Escrever $(-z_1)$ na forma trigonométrica .... 1 ponto

ou

Módulo de z_1 .... 2 pontos

Argumento de z_1 .... 3 pontos

Escrever z_1 na forma trigonométrica .... 1 ponto

Escrever $(-z_1)$ na forma trigonométrica .... 1 ponto

Concluir que $(-z_1) = \sqrt[3]{z_2} \Leftrightarrow (-z_1)^3 = z_2$ .... 2 pontos

Calcular $(-z_1)^3$ $(8 \text{ cis } (2\pi)$ ou equivalente $)$ .... 4 pontos

Concluir que $8 \text{ cis } (2\pi) = z_2$ .... 2 pontos

3.º processo

Escrever a expressão geradora das raízes cúbicas de z_2 .... 2 pontos

Concluir que uma das raízes cúbicas de z_2 é $2\ \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$............................. 5 pontos

Escrever $2\ \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ na forma algébrica ou $(-z_1)$ na forma trigonométrica (**ver nota**) .... 7 pontos

Nota: A escrita de $(-z_1)$ na forma trigonométrica deve ser classificada de acordo com o já discriminado no 2.º processo; a escrita de $2\ \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ na forma algébrica deve ser classificada de acordo com o seguinte critério:

$2\ \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$ .... 1 ponto

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ .... 2 pontos

$\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ .... 2 pontos

Restantes cálculos .... 2 pontos

Concluir que $2\ \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=(-z_1)$ .... 1 ponto

1.2. .... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º processo

Calcular i^{46} $(i^{46}=-1)$ .... 3 pontos

Calcular z_3 $(z_3=-1+\sqrt{3}\ i)$ .... 1 ponto

Indicar as coordenadas de $A(1,-\sqrt{3})$ e de $B(-1,\sqrt{3})$ .... (3 + 3) .... 6 pontos

Calcular $\overline{AB}$ $(\overline{AB}=4)$ .... 5 pontos

2.º processo

Calcular i^{46} $(i^{46}=-1)$ .... 3 pontos

Calcular z_3 $(z_3=-1+\sqrt{3}\ i)$ .... 1 ponto

Reconhecer que z_1 e z_3 são números complexos simétricos .... 3 pontos

Referir que $\overline{OA}=|z_1|$ (ou $\overline{OB}=|z_3|$) .... 2 pontos

Calcular $\overline{OA}$ (ou $\overline{OB}$) .... 2 pontos

Calcular $\overline{AB}$ $(\overline{AB}=\overline{OA}+\overline{OB}$ ou $\overline{AB}=2\overline{OA})$ .... 4 pontos

3.º processo

Calcular i^{46} $(i^{46} = -1)$ .... 3 pontos

Calcular z_3 $(z_3 = -1 + \sqrt{3}\ i)$ .... 1 ponto

Identificar $\overline{AB} = |z_1 - z_3|$ (ou $\overline{AB} = |z_3 - z_1|$) .... 5 pontos

Calcular $z_1 - z_3$ (ou $z_3 - z_1$) .... 4 pontos

Calcular $\overline{AB}$ $(\overline{AB} = 4)$ .... 2 pontos

2.1. .... **15 pontos**

Expressão que dá a probabilidade (**ver notas 1, 2** e **3**)...................................... 12 pontos

Resultado na forma pedida $P = 0{,}24$ (**ver nota 4**) .... 3 pontos

Notas:

1. Indicam-se, a seguir, possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a classificação a atribuir. As respostas apresentadas têm todas a forma de fracção. O examinando pode, no entanto, apresentar expressões equivalentes na forma de um produto de fracções.

1.º caso

Fracções com denominador ${}^{10}A_3'$ (ou equivalente) e com numerador igual a:

${}^{9}A_2' \times 3$ (ou equivalente) .... 12 pontos

${}^{10}A_2' \times 3$ (ou equivalente) ou ${}^{9}A_2'$ (ou equivalente) .... 8 pontos

${}^{9}A_2 \times 3$ (ou equivalente) .... 6 pontos

2. Caso a resposta do examinando corresponda a um nível de desempenho que se enquadre entre duas situações previstas, a classificação a atribuir deve ser a que está indicada para a situação que, das duas, tem menor pontuação. Se a resposta do examinando revelar um desempenho inferior à última situação prevista para o 1.º caso, mas seja uma fracção de valor pertencente ao intervalo $[0,\ 1]$ e com denominador ${}^{10}A_3'$ (ou equivalente), a classificação a atribuir deverá ser de 4 pontos.

2.º caso

Fracções (de valor pertencente ao intervalo $[0,\ 1]$) com outros denominadores e com numerador igual a:

${}^{9}A_2' \times 3$ (ou equivalente) .... 6 pontos

Outras situações .... 0 pontos

3. Se o examinando indicar apenas o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, a classificação a atribuir a esta etapa deverá ser desvalorizada em um ponto.

4. A classificação relativa a esta etapa só é atribuída se a primeira etapa não tiver sido classificada com zero pontos.

2.2. .... **15 pontos**

A composição deverá contemplar os seguintes pontos:

- Explicação de ${}^{12}C_3 \times {}^{10}C_2$: o examinando deverá referir que ${}^{12}C_3 \times {}^{10}C_2$ é o número de comissões diferentes com três raparigas e dois rapazes que é possível formar com os alunos da turma;
- Explicação de ${}^{11}C_2$: o examinando deverá referir que, como a Ana faz parte da comissão, só é preciso escolher duas raparigas de entre as onze restantes; o número de conjuntos diferentes que é possível formar é ${}^{11}C_2$;
- Explicação de 9 (ou ${}^{9}C_1$): o examinando deverá referir que, como o Miguel faz parte da comissão, só é preciso escolher um rapaz de entre os nove restantes; o número de conjuntos diferentes que é possível formar é 9;
- Explicação de ${}^{11}C_2 \times 9$: o examinando deverá referir que ${}^{11}C_2 \times 9$ é o número de comissões diferentes com três raparigas e dois rapazes, incluindo a Ana e o Miguel, que é possível formar com os alunos da turma;
- Explicação de ${}^{12}C_3 \times {}^{10}C_2 - {}^{11}C_2 \times 9$: o examinando deverá referir que a diferença representa o número de comissões diferentes com três raparigas e dois rapazes que é possível formar com os alunos da turma, não incluindo, simultaneamente, a Ana e o Miguel.

Na tabela seguinte indica-se como a resposta a este item deve ser classificada, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa descritos nos critérios gerais e os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina:

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina / Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa			Níveis 1	2	3
Níveis	5	O examinando explica correctamente os cinco pontos.	13	14	15
	4	O examinando explica correctamente quatro pontos.	10	11	12
	3	O examinando explica correctamente três pontos.	7	8	9
	2	O examinando explica correctamente dois pontos.	4	5	6
	1	O examinando explica correctamente um ponto.	1	2	3

Apenas podem ser atribuídas classificações correspondentes a um dos valores constantes do quadro. Não há lugar a classificações intermédias.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

3. .... **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos (**ver nota**):

1.º processo

Reconhecer que, se a probabilidade referida é $\frac{1}{2}$, ficam na caixa B tantas bolas verdes como azuis .... 10 pontos

Concluir que a bola retirada da caixa A e colocada na caixa B só pode ser verde.. 5 pontos

2.º processo

O examinando considera que a bola retirada da caixa A e colocada na caixa B é azul.

Identificar o número de casos possíveis (8) .... 3 pontos

Identificar o número de casos favoráveis (5) .... 3 pontos

Probabilidade de a bola retirada da caixa B ser azul $\left(P = \frac{5}{8}\right)$ .... 3 pontos

Concluir que o valor da probabilidade encontrado é diferente do valor da probabilidade dado .... 3 pontos

Concluir que a bola retirada da caixa A e colocada na caixa B só pode ser verde.. 3 pontos

Nota: Se o examinando começar por considerar que a bola retirada da caixa A e colocada na caixa B é verde e concluir que a probabilidade referida é $\frac{1}{2}$, prova a implicação recíproca da implicação pedida. Neste caso a classificação a atribuir deverá ser de cinco pontos.

4. .... **15 pontos**

Estudar a função quanto à existência de assimptotas verticais do seu gráfico ...... 8 pontos

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = e$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ (**ver nota 1**) .... 3 pontos

Concluir que a recta de equação $x = 0$ é assimptota vertical do gráfico de f... 2 pontos

Justificar que o gráfico de f não tem outras assimptotas verticais .... 3 pontos

Estudar a função quanto à existência de assimptotas horizontais do seu gráfico (**ver nota 2**) .... 7 pontos

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ .... 5 pontos

Concluir que a recta de equação $y = 0$ é assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \to +\infty$ .... 2 pontos

Notas:

1. Apenas o valor do $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ permite concluir a existência da assimptota vertical. Assim, a classificação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada, quer o examinando calcule os dois limites laterais, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, quer apenas calcule $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

2. Se o examinando tentar calcular $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, a classificação a atribuir a esta etapa deve ser desvalorizada em 2 pontos.

5. .... **15 pontos**

Representar graficamente a função f em $[0, 3]$ .... 2 pontos

Representar graficamente a função g em $[0, 3]$ .... 2 pontos

Assinalar devidamente o ponto O .... 1 ponto

Assinalar devidamente o ponto A .... 1 ponto

Coordenadas aproximadas do ponto $A(1{,}4;\ 1{,}2)$ (**ver nota**)......... (1 + 1) .... 2 pontos

Assinalar devidamente o ponto B .... 1 ponto

Coordenadas do ponto $B(2, 0)$ .... (1 + 1) .... 2 pontos

Desenhar o triângulo $[OAB]$ .... 1 ponto

Expressão que dá a área do triângulo $[OAB]$ .... 2 pontos

Área do triângulo $[OAB]$ .... 1 ponto

Nota: São de aceitar, sem qualquer desvalorização, para valores das coordenadas do ponto A, valores que difiram dos valores dados numa décima. Se forem apresentados outros valores, que não respeitem o referido anteriormente, a classificação a atribuir à respectiva etapa deve ser de zero pontos.

6.1. .... **15 pontos**

Determinar $h'(x)$ .... 2 pontos

Determinar os zeros de h' .... 4 pontos

Escrever a equação $h'(x) = 0$ .... 1 ponto

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .... 3 pontos

Estudar o sinal de h' e consequente conclusão, relativamente à monotonia e aos extremos relativos de h, com recurso a um quadro .... 5 pontos

Primeira linha do quadro (relativa à variável x, de acordo com o domínio da função) .... 2 pontos

Sinal de h' .... 2 pontos

Relação entre o sinal de h' e a monotonia de h .... 1 ponto

Determinar o máximo $(h(0) = 4)$ .... 2 pontos

Indicar os intervalos de monotonia (**ver nota**) .... 2 pontos

Nota: A resposta correcta é o intervalo $]-1, 0]$, para a indicação do intervalo onde a função é monótona crescente, e o intervalo $[0, +\infty[$, para a indicação do intervalo onde a função é monótona decrescente. No entanto, é de aceitar, sem qualquer desvalorização, o intervalo de $]-1, 0[$ para o intervalo onde a função é monótona crescente e $]0, +\infty[$ para o intervalo onde a função é monótona decrescente.

6.2. .... **15 pontos**

Referir que a função h é contínua em $[5,6]$ (**ver nota 1**) .... 2 pontos

Calcular $h(5)$ .... 3 pontos

Calcular $h(6)$ .... 3 pontos

Concluir que $h(6) < 0 < h(5)$ (ou concluir que $h(5)$ e $h(6)$ têm sinais contrários) .... 3 pontos

Concluir o pretendido (**ver nota 2**) .... 4 pontos

Notas:

1. Se o examinando não referir a continuidade da função no intervalo $[5,6]$, mas afirmar que a função é continua em todo o seu domínio, a classificação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada.

2. Se o examinando concluir o pretendido, mas não referir que a conclusão resulta do Teorema de Bolzano, ou do seu Corolário, a classificação a atribuir a esta etapa não deve ser desvalorizada.

7.1. .... **10 pontos**

Calcular $N(0)$ e interpretar .... 5 pontos

$N(0) = 10$ .... 2 pontos

Interpretação: 10 corresponde ao número de amigos
que formaram a associação.. 3 pontos

Calcular $\lim_{t \to +\infty} N(t)$ e interpretar... 5 pontos

$\lim_{t \to +\infty} N(t) = 2000$ .... 2 pontos

Interpretação: com o decorrer do tempo, o número de sócios
aproxima-se de 2000 .... 3 pontos

7.2. .... **15 pontos**

Equacionar o problema $N(t) = 1000$ .... 2 pontos

Resolver a equação $\dfrac{2000}{1 + 199e^{-0.01t}} = 1000$ .... 11 pontos

Obter a equação $e^{-0,01t} = \dfrac{1}{199}$ (ou equivalente)..................... 5 pontos

Obter a equação $-0,01t = \ln\left(\dfrac{1}{199}\right)$ .... 3 pontos

Restantes cálculos .... 3 pontos

Resposta: 529 ou 530 dias .... 2 pontos