

Parte I (Escolha Múltipla)

	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	D	D	C	A	B	B	D	A
Versão 2	A	A	B	D	C	C	A	D

Parte II

$$1.1. \frac{2z_1 - i^{18} - 3}{1 - 2i} = \frac{2 - 2i + 1 - 3}{1 - 2i} = \frac{-2i(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{-2i + 4}{1 + 4} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$$

$$1.2. z_1 = 1 - i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} \right)$$

Sendo z_1 uma das raízes quartas de um número complexo z , as outras raízes são:

$$z_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right), z_3 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} + \pi \right) \text{ e } z_4 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} \right), \text{ então pode concluir-se}$$

que a raiz cuja imagem geométrica é um ponto do 3º quadrante é $z_4 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{4} \right)$.

$$2.1. \begin{aligned} P(\overline{A} \cup \overline{B}) &= P(\overline{A}) + P(\overline{B}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) \\ &= P(\overline{A}) + 1 - P(B) - P(\overline{A \cup B}) \\ &= P(\overline{A}) - P(B) + 1 - P(\overline{A \cup B}) \\ &= P(\overline{A}) - P(B) + P(A \cup B) \end{aligned} \quad \text{c.q.d.}$$

2.2.

	Positiva no exame	Não positiva no exame	Total
Rapaz	$0,60 \times 120 = \mathbf{72}$	$120 - 72 = \mathbf{48}$	120
Rapariga	$0,65 \times 160 = \mathbf{104}$	$160 - 104 = \mathbf{56}$	160
Total	176	104	280

Consideremos os acontecimentos R : “ser rapaz” e P : “ter positiva no exame”.

A probabilidade pretendida é $P(\overline{R} \cup \overline{P})$.

$$P(\overline{R} \cup \overline{P}) = P(\overline{R}) + P(\overline{P}) - P(\overline{R} \cap \overline{P}) = \frac{160}{280} + \frac{104}{280} - \frac{56}{280} = \frac{208}{280} \approx 0,74$$

3.

Seja X a variável aleatória: "soma dos números inscritos nas duas fichas", pode tomar os valores 2, 3 ou 4.

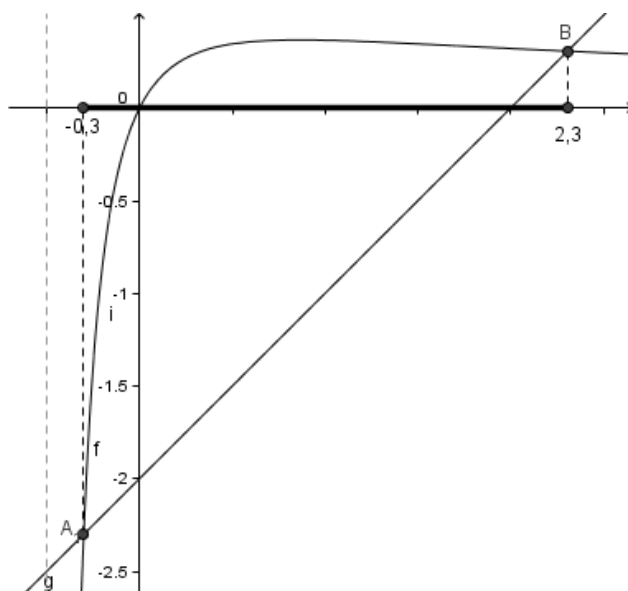
$$P(X = 2) = \frac{3 \times 2}{7 \times 6} = \frac{1}{7}, \quad P(X = 3) = \frac{3 \times 4}{7 \times 6} \times 2 = \frac{4}{7} \quad \text{e} \quad P(X = 4) = \frac{4 \times 3}{7 \times 6} = \frac{2}{7}.$$

A tabela de distribuição de probabilidades da variável X é:

x_i	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

O valor mais provável da variável é portanto 3.

4.



As coordenadas dos pontos A e B com aproximação às décimas são:

$$A(-0,3; -2,3) \quad \text{e}$$

$$B(2,3; 0,3).$$

A solução, no domínio $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$, da

inequação $f(x) > g(x)$ é o

conjunto $] -0,3; 2,3[$, abcissas dos pontos do gráfico de f acima dos pontos do gráfico de g .

Assim, as soluções inteiras são

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$$

5.

O gráfico que representa a função a é o Gráfico 2.

Rejeita-se o gráfico 1 porque x varia entre 0 e π e o gráfico 3 porque se considerarmos a base $[AB]$, a correspondente altura é a medida da distância entre as rectas, e conseqüentemente a área é constante, pelo que o gráfico tem de ser um segmento de recta paralelo ao eixo das abcissas. O gráfico 4 é rejeitado porque 0 e π não pertencem ao domínio, uma vez que sendo as rectas estritamente paralelas, o ponto S nunca pertence a AB .

6.1.

$$M(0) = 15.$$

$$M(t) = \frac{1}{2}M(0) \Leftrightarrow 15e^{-0,02t} = \frac{15}{2} \Leftrightarrow e^{-0,02t} = 0,5 \Leftrightarrow -0,02t = \ln(0,5) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0,5)}{-0,02} \Leftrightarrow t \approx 34,657$$

Dado que $60 \times 0,657 = 39,42$, podemos dizer, tendo em consideração as instruções de arredondamento, que a massa inicial reduz-se a metade ao fim de 34 h e 39 min.

6.2. A função M é contínua em $[0, +\infty[$ porque é uma função exponencial (produto de uma constante pela composta da exponencial e^x com uma função afim), e conseqüentemente é contínua em $[2,5; 4]$.

Como, além disso, $M(2,5) \approx 14,268$, $M(4) \approx 13,847$ e $14 \in]M(4), M(3)[$, o teorema de Bolzano garante que existe pelo menos um valor no intervalo $]2,5; 4[$, cuja imagem é 14. Deste modo pode então dizer-se que entre as 2h 30min e as 4 h após o início da observação a massa da amostra atingiu os 14 gramas.

7.1.

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \text{sen}(4x) - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x)}{4x} \times 4 = 1 \times 4 = 4$$

7.2.

$$g'(x) = 4 \cos(4x)$$

$$g'(x) = 0 \wedge x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow \cos(4x) = 0 \wedge x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{4} \wedge x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} \vee x = \frac{3\pi}{8}$$

x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$
g'		+	0	-	0	+	
g		\nearrow	3	\searrow	1	\nearrow	

A função g é monótona crescente em $\left]0, \frac{\pi}{8}\right[$ e em $\left[\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right[$.

É monótona decrescente em $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]$

A função tem máximo 3 em $\frac{\pi}{8}$ e mínimo 1 em $\frac{3\pi}{8}$.