



ESCOLA SECUNDÁRIA DE CASQUILHOS

12º Ano Turma A - C.C.H. de Ciências e Tecnologias -

Teste de Avaliação de Matemática A – V1

Duração: 90 min

08 Março 2010

Prof.: Maria João Mendes Vieira

Na folha de respostas, indique claramente a versão do teste.
A ausência dessa indicação implica a classificação das respostas aos itens de escolha múltipla com zero pontos.

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas apenas o **número de cada item** e a **letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**
- Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. O António, o Bernardo, o Carlos, a Dina e a Emília foram ao cinema e compraram bilhetes para a mesma fila todos seguidos.

De quantas maneiras diferentes se podem sentar, ficando um rapaz no lugar do meio?

- (A) 120 (B) 144 (C) 72 (D) 27

2. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é:

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,1	$a - 0,2$	0,3

Qual é o valor de a ?

- (A) 0,6 (B) 0,8 (C) 0 (D) 0,4

3. Na figura está representado o gráfico de uma função f , de domínio \mathbb{R}^+ .

Tal como a figura sugere, a recta de equação $y = 1$ é assíntota do gráfico de f .

Indique o valor de: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{x}{e^x} \right]$

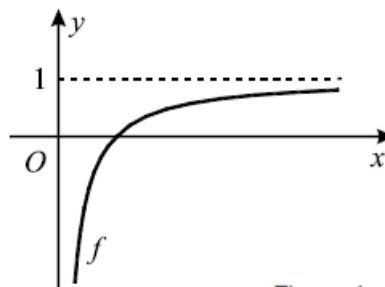


Figura 1

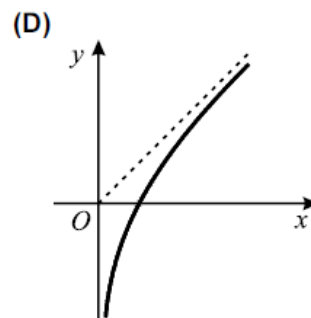
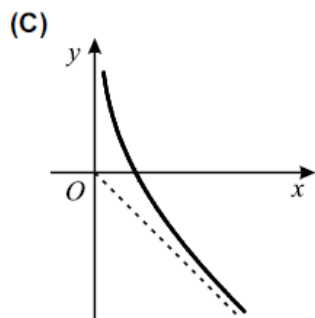
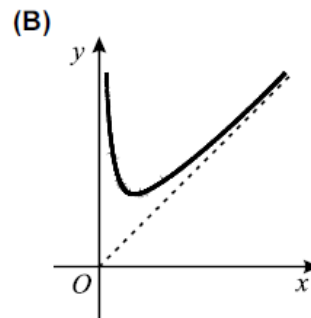
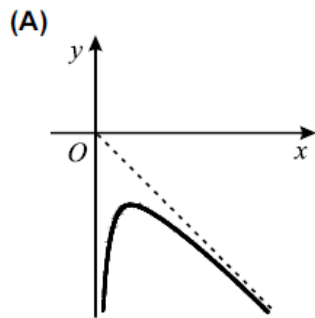
- (A) $+\infty$ (B) -1 (C) 1 (D) 0

4. De uma função g de domínio \mathbb{R}^+ , sabe-se que:

- $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) + x] = 0$

Em cada uma das alternativas apresentadas abaixo, está representado, em referencial o.n. xOy , o gráfico de uma função e, a tracejado, uma assíntota desse gráfico.

Em qual das alternativas pode estar representado o gráfico de g ?



5. Para um certo valor de a , é **contínua** em \mathbb{R} a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 2x + a & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Qual é o valor de a ?

(A) -3

(B) 0

(C) 1

(D) -1

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Um saco contém onze bolas, numeradas de 1 a 11.

1.1. Ao acaso, tiram-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: «o número da primeira bola retirada é par»

B: «o número da segunda bola retirada é par»

Indique o valor de $P(B|\bar{A})$, na forma de fracção irredutível, sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada.

Justifique a sua resposta, começando por explicar o significado de $P(B|\bar{A})$ no contexto da situação descrita.

1.2. Considere novamente o saco com a sua constituição inicial.

Ao acaso, extraem-se simultaneamente três bolas do saco e anotam-se os respectivos números.

Qual é a probabilidade de o produto desses números ser ímpar?

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

2. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$\log_2(x - 1) + \log_2(13 - x) \leq 5$$

Apresente a sua resposta na forma de união de intervalos de números reais.

3. Num bosque existem diversas espécies de plantas. Considere que o **número de plantas**, em **centenas**, que cresceu no bosque varia de acordo com uma função do tipo

$$A(t) = ae^{bt}, t \geq 0$$

em que a variável **t** designa o **número de anos** decorridos desde um certo instante inicial.

A constante real **b**, depende da espécie da planta e a constante real **a** é o número de plantas no referido instante inicial.

Resolva as alíneas seguintes sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar cálculos numéricos.

3.1. Relativamente a uma determinada planta sabe-se que

- Decorrida uma década, após a contagem inicial, verificou-se que no bosque existiam 100 plantas
- Passados 15 anos da contagem inicial existiam 250 plantas

Tendo em conta estes dados, determine:

- o valor da constante **b** para esta planta
- o número de plantas existentes no bosque, no referido instante inicial.

Apresente os dois valores arredondados às centésimas.

Nota: se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3.2. No bosque existe uma outra espécie de plantas para a qual se sabe que $b = 0,2$

Verifique que, quaisquer que sejam os valores de **a** e de **t**, $\frac{A(t+3,5)}{A(t)}$ é constante.

Determine o valor dessa constante, arredondado às unidades, e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

4. Seja f a função de domínio \mathbb{R}^+ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 3}{x^2 - 2x + 1} & \text{se } x < 1 \\ \ln(x) - e^{1-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

4.1. Sem recorrer à calculadora, estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais e horizontais, do seu gráfico.
Indique uma equação para cada assíntota encontrada.

4.2. Na figura 2 está representada, em referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função f .

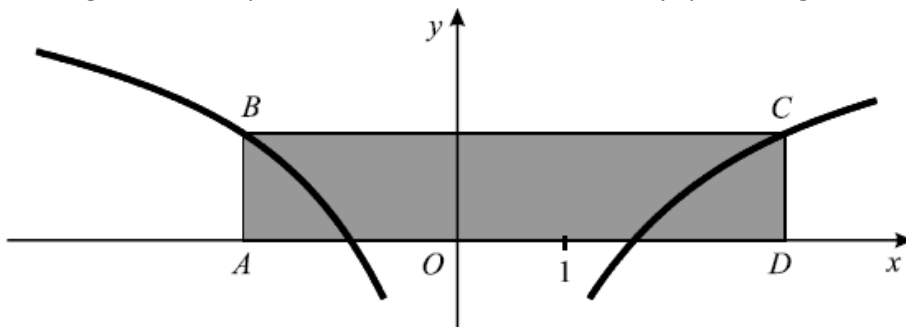


Figura 2

O rectângulo [ABCD] tem dois vértices no eixo Ox , estando os outros dois no gráfico de f . O ponto A tem abcissa -2 .

Determine a área do rectângulo [ABCD]

Nota: Na resolução deste problema vai necessitar de determinar a abcissa do ponto C .

Para tal, utilize as capacidades gráficas da sua calculadora.

Reproduza na sua folha de teste a parte do gráfico de f que visualizou, bem como a recta BC .

Assinale também o ponto C e apresente a sua abcissa arredondada às centésimas.

Apresente a área pedida igualmente arredondada às centésimas.

5. De uma função f , contínua em \mathbb{R} , sabe-se que:

- O gráfico de f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa $x=0$
- $f(2) > 0$

Mostre que a função $h(x)$ definida por $h(x) = f(x) - \frac{f(2)}{2}$ tem, pelo menos um zero no intervalo $]0; 2[$.

FIM

Grupo I					Grupo II								
1	2	3	4	5	1.1.	1.2.	2.	3.1	3.2	4.1.	4.2.	5.	TOTAL
10	10	10	10	10	20	20	20	20	15	20	15	20	200