ESCOLA SECUNDÁRIA DE CASQUILHOS

12º Ano Turma **A** - C.C.H. de Ciências e Tecnologias -

3º Teste de Avaliação de Matemática A

Duração: **90** min 16 Fevereiro 2012 **Prof.:** *Maria João Mendes Vieira*

Na folha de respostas, indicar de forma legível a versão da prova.
A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilizar apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser primeiramente elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.
Utilizar a calculadora gráfica, sempre que for necessário.
Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escrever de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresentar apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.
Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:
• o número do item;
• a letra que identifica a única alternativa correcta.
Não apresente cálculos, nem justificações.

O teste inclui, um Formulário, na última página.
As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado do teste.

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única alternativa correcta.
Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a alternativa seleccionada.
Não apresente cálculos nem justificações.

1. De um baralho com 52 cartas distribui-se uma «mão» de 7 cartas a um jogador, que as coloca pela ordem que as recebe.
A probabilidade de obter a sequência DAMA-VALETE-4-5-6-8-9 é:

(A) $\frac{1}{{}^{52}C_7}$ **(B)** $\frac{4^7}{{}^{52}A_7}$ **(C)** $\frac{4^7}{{}^{52}C_7}$ **(D)** $\frac{7}{{}^{52}C_7}$

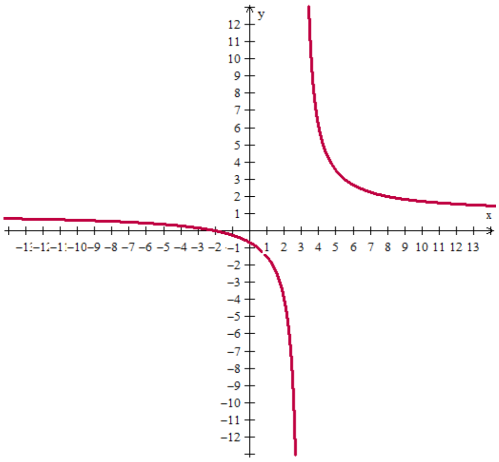
2. Sendo $h(x) = -\,e^x - \,c$, em que c é um número real **positivo** qualquer e e é o número de Neper, podemos afirmar que h:

(A) Tem um único zero **(B)** Tem no máximo um zero
(C) Tem pelo menos um zero **(D)** Nunca tem zeros

3. O domínio da função real de variável real $f(x) = e^{\frac{1}{lnx}}$ é:

(A) $|R^+$ **(B)** $|R$ **(C)** $|R^+\backslash\{1\}$ **(D)** $|R\,\backslash\{1\}$

4. Na figura está representada graficamente uma função g, de domínio $|R\backslash\{3\}$.
As rectas $x = 3$ e $y = 1$ são assíntotas do gráfico de g.



Seja $b_n = 5 - n^2$

O valor de $\lim\ g(b_n)$ é:

(A) 3 **(B)** $-\infty$ **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

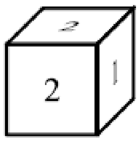
5. Seja h uma função **contínua**, de domínio $|R$.
Qual dos seguintes conjuntos **não pode** ser o contradomínio de h ?

(A) $|R$ (B) $|R\ \backslash\{0\}$ (C) $|R^-$ (D) $]0;1[$

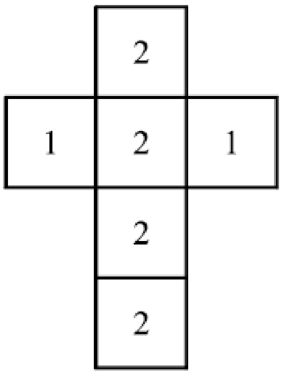
GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.
Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Na figura está representado um dado equilibrado, bem como a respectiva planificação. Lança-se este dado duas vezes.



Seja X a variável aleatória: "*soma dos números saídos nos dois lançamentos*".



1.1. Calcule a probabilidade da soma ser 3.

1.2. Determine o valor de k tal que $P(X = k) = \frac{1}{9}$.

1.3. Represente, através de uma tabela, a distribuição de probabilidades da variável aleatória X.

2. A magnitude aparente (m) e a magnitude absoluta (M) de uma estrela são grandezas utilizadas em Astronomia para calcular a distância (d) a que essa estrela se encontra da Terra.

As três variáveis estão relacionadas pela fórmula $10^{0,4(m-M)} = \frac{d^2}{100}$
(d é medida em *parsec*, medida utilizada em Astronomia para grandes distâncias).

Prove que, para quaisquer m, M e d, se tem: $m = M - 5(1 - log d)$

3. Considere a função real de variável real, definida por $g(x) = 2\log_3 x - \log_3(x+2)$

Utilizando processos exclusivamente analíticos, determine, sob a forma de intervalo de números reais, o conjunto solução de $g(x) \leq 0$.

4. Admita que a percentagem de habitantes com telemóvel, numa determinada cidade, é dada pelo seguinte modelo matemático $P(t) = \frac{90}{1+15e^{-0,54t}}$, t em anos e correspondendo 1990 a $t = 0$.

Responder às questões seguintes utilizando processos exclusivamente analíticos e a calculadora apenas para efectuar eventuais cálculos numéricos. Nos cálculos intermédios conservar, no mínimo, 3 casas decimais.

4.1. Determine em que ano metade dos habitantes da população tem telemóvel.

4.2. Determine $\lim_{t\to+\infty} P(t)$ e interprete o resultado no contexto do problema.

5. Considera a função h, definida por $h(x) = \frac{2x^2-x-3}{x^2-x-2}$. Calcule os seguintes limites:

5.1. $\lim_{x\to-1} h(x)$

5.2. $\lim_{x\to+\infty} h(x)$

5.3. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-e^{-2x}}{x} - h(x)\right)$

6. Considere a função f, de domínio $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$, Definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \ln(1+x-x^2) & se \quad -\frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 2 & se \ \ x = 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & se\ x > 1 \end{cases}$$

6.1. Estude a função quanto à continuidade.

6.2. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine o valor de x pertencente ao intervalo $\left[-\frac{1}{2}; 1\right[$ tal que $g(x) = -2 + g(4)$.
Indique o valor pedido arredondado às décimas e apresente o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora.

6.3. Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a função f tem pelo menos um zero no intervalo $\left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$.

FIM

FORMULÁRIO

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

COTAÇÕES																		
Grupo I					**Grupo II**													**Total**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**1.1.**	**1.2.**	**1.3.**	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.1.**	**6.2.**	**6.3.**	
10	10	10	10	10														**200**