GRUPO I

1. Opção (A) $sen\alpha - \frac{\alpha}{2}$ A área é a diferença entre a área do rectângulo e do sector circular. Base rectângulo = $sen\alpha$

2. Opção (A) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

3. $\boldsymbol{m = tg\theta} = \frac{2+1}{-1-4} = -\frac{3}{5}$ → Opção D

4. Opção B

Na opção A não há planos paralelos
Na opção D os 3 planos são paralelos
Na opção C há dois planos coincidentes

5. Opção B. Os vectores normais aos planos são perpendiculares $(1,-1,0) \cdot (0,0,1) = 0$

GRUPO II

1.

1.1. $f(x) = 2sen\frac{10\pi}{3} - tg\frac{2\pi}{3} - cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + sen(\pi + x) = -2sen\frac{\pi}{3} - \left(-tg\frac{\pi}{3}\right) + senx - (-senx) =$

$= -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + senx + senx = 2senx, \forall\, x \in \mathbb{R}$

1.2.

$f(x) = -1 \Leftrightarrow 2senx = -1 \Leftrightarrow senx = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k.2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{7\pi}{6} + k.2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Como $x \in [-\pi, \pi]$ as soluções são $x = -\frac{\pi}{6} \vee x = -\frac{5\pi}{6}$

2.

$A(0,y), C(x,0) e\ B(x,y)$ então $\overrightarrow{OA} = (0,y)$ e $\overrightarrow{OB} = (x,y)$

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 16 \Leftrightarrow (0,y).(x,y) = 16 \Leftrightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow y = 4$$

Como é um quadrado $x = y = 4$ e então $A(0,4)\ e\ C(4,0)$

3.

3.1. $A(4,0,0), B(4,4,0), V(2,2,5)$ então: $\overrightarrow{VB} = B - V = (2,2,-5)$ e $\overrightarrow{VA} = A - V = (2,-2,-5)$

$\vec{n} = (a,b,c)$ tal que

$$\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{VA} = 0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{VB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a,b,c).(2,-2,-5) = 0 \\ (a,b,c).(2,2,-5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2b - 5c = 0 \\ 2a + 2b - 5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 2b + 5c \\ 2b + 5c + 2b - 5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2a = 5c \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5c}{2} \\ b = 0 \end{cases}$$

Pelo que $\vec{n} = (a,b,c) = \left(\frac{5c}{2}, 0, c\right)$. Se $c = 2$ então $\vec{n} = (5,0,2)$

E a equação do plano é $5(x-4) + 2z = 0 \Leftrightarrow 5x + 2z - 20 = 0$

3.2. Se o ponto $(3k, k+2, 1-k)$ pertence ao plano VBC: $5(3k) + 2(1-k) - 20 = 0 \Leftrightarrow$

$15k + 2 - 2k - 20 = 0 \Leftrightarrow 13k = 18 \Leftrightarrow k = \frac{18}{13}$

3.3. $\overrightarrow{CA} = A - C = (4,-4,0)$ Equações cartesianas da reta CA: $\frac{x-4}{4} = \frac{y}{-4} \wedge z = 0$

4.

4.1. Ordenada 1 → $-\frac{x}{2} = 1 - 1 = \frac{z+2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{x}{2} = 0 \\ \frac{z+2}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -2 \end{cases}$ Ou seja $P(0,1,-2)$

4.2. $\vec{r} = (-2,1,2)$ e $\overrightarrow{n_\alpha} = (1,-2,2)$. Como $\vec{r} \cdot \overrightarrow{n_\alpha} = (-2,1,2) \cdot (1,-2,2) = 0$ então $\vec{r} \perp \overrightarrow{n_\alpha}$ pelo que a reta é paralela ao plano.

4.3. $x - 2y + 2z - 5 = 0$ interseta o eixo OY quando $x = z = 0$ logo $-2y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{2}$

Ponto $A(0, -\frac{5}{2}, 0)$

Se a reta é perpendicular ao plano tem a direcção do vetor normal ao plano $\overrightarrow{n_\alpha} = (1,-2,2)$

Logo as equações cartesianas de s são: $x = \frac{y+\frac{5}{2}}{-2} = \frac{z}{2}$

5.

5.1. $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-3y) - y + z = 0 \\ x = -3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7y + z = 0 \\ x = -3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 7y \\ x = -3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{z}{7} \\ y = -\frac{x}{3} \end{cases}$

Equações cartesianas da reta de intersecção $-\frac{x}{3} = y = \frac{z}{7}$

Equação vectorial $(x,y,z) = (0,0,0,) + k(-3,1,7), k \in \mathbb{R}$

<u>OU</u>

Os pontos da reta são da forma $(-3y, y, 7y)$. Dando valores a y obtem-se dois pontos da recta e consequentemente um vetor.

5.2. Os pontos de interseção do plano φ com os eixos coordenados são:

Com o eixo dos XX: $y = z = 0 \; logo \;\; x = 1 \rightarrow A(1,0,0)$

Com o eixo dos YY: $x = z = 0 \; logo \;\; y = -1 \rightarrow B(0,-1,0)$

Com o eixo dos ZZ: $x = y = 0 \; logo \;\; z = -\frac{1}{2} \rightarrow C(0,0,-\frac{1}{2})$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,-1,0) \quad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1,0,-\tfrac{1}{2}) \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (0,1,-\tfrac{1}{2}) \quad \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(1)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Assim $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$ e $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\| \neq \|\overrightarrow{AB}\|$ logo o triângulo é isósceles .