ESCOLA SECUNDÁRIA DE CASQUILHOS

Matemática A **12º Ano**

Nome_________________________________**Nº**___ **Turma:**___ __ / __ /20___

Tema: Introdução ao cálculo diferencial II – Limites

➢ LIMITE DE UMA FUNÇÃO SEGUNDO HEINE

Considerando:

– f uma função real de variável real
– a um ponto de acumulação de D_f

$f(x)$ tende para b, quando x tende para a, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, se e só se para qualquer sucessão (x_n) de elementos de D_f , distintos de a, convergente para a, corresponde uma sucessão $f(x_n)$ convergente para b.

Limites laterais de uma função f

Considerando:

– f uma função real de variável real
– a um ponto de acumulação de D_f

diz-se que k_1 é **limite à esquerda** de $f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = k_1$, se e só se quando $(x_n) \to a^-$, $f(x_n) \to k_1$.

diz-se que k_2 é **limite à direita** de $f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = k_2$, se e só se quando $(x_n) \to a^+$, $f(x_n) \to k_2$.

Se $k_1 = k_2$ então existe um único limite da função no ponto a, que é $b = k_1 = k_2$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Observações:

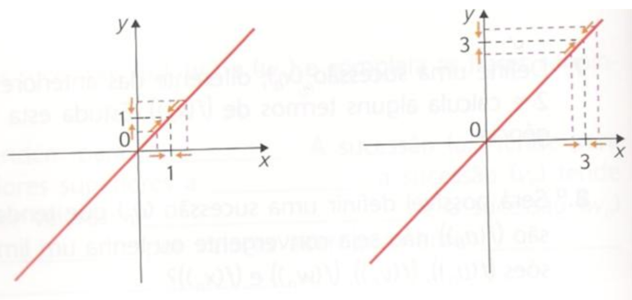
I. A definição não exige que o ponto pertença ao domínioda função
II. Pode existir $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e não ser igual a $f(a)$.

Exemplos:

I. $\lim\limits_{x\to 1} (x) = 1$

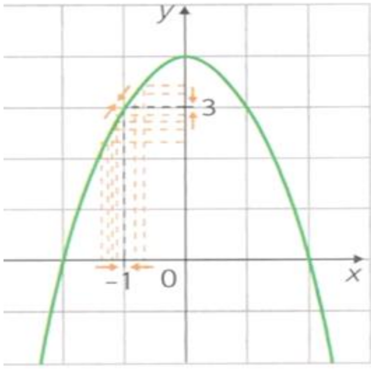
$\lim\limits_{x\to 3} (x) = 3$

$\lim\limits_{x\to a} (x) = a$



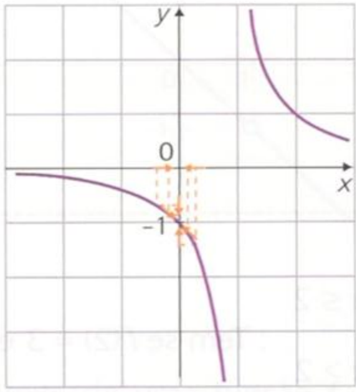
2.

$$\lim_{x \to -1} (4 - x^2) = 4 - (-1)^2 = 4 - 1 = 3$$



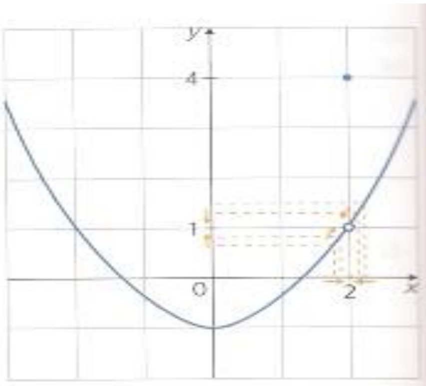
3.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0-1} = -1$$



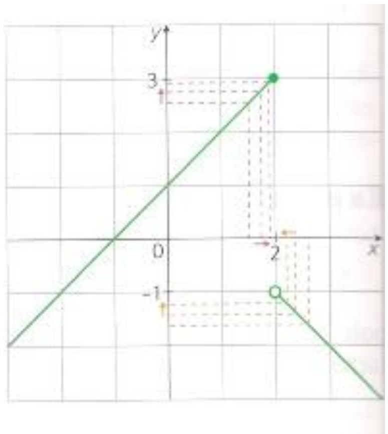
4.

Seja $f(x) = \begin{cases} 0{,}5\,x^2 - 1 & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 4 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$. Será que $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 4$?



5.

Seja $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se} \quad x \leq 2 \\ -x + 1 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$. Tem-se $f(2) = 3$ e $\lim_{x \to 2} f(x)$ nem sequer existe.



PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DOS LIMITES

Consideremos f e g duas funções reais de variável real tais que: $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{x\to a} g(x) = b'$.

Então:

$\lim_{x\to a} (f \pm g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = b \pm b'$; $\qquad \lim_{x\to a} (f \times g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x) = b \times b'$;

$\lim_{x\to a} (k \times f)(x) = k \times \lim_{x\to a} f(x) = k \times b,\ k \in \mathbb{R}$; $\qquad \lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{b}{b'}$;

$\lim_{x\to a} \left[f(x)\right]^k = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^k = b^k,\ k \in \mathbb{N}$; $\qquad \lim_{x\to a} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[k]{b},\ k \in \mathbb{N}$.

Nota: $\lim_{x\to a} f(x) = k, \qquad f(x) = k,\ k \in \mathbb{R} \rightarrow$ Função constante

$\lim_{x\to a} f(x) = a, \qquad f(x) = x \ \rightarrow$ Função identidade

Regras práticas de cálculo com o símbolo ∞

Consequências da soma de limites:

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

$a + (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

$a + (-\infty) = -\infty$

Consequências do produto de limites:

$(+\infty)\times(+\infty) = +\infty$

$(-\infty)\times(+\infty) = -\infty$

$(+\infty)\times(-\infty) = -\infty$

$(-\infty)\times(-\infty) = +\infty$

Se a>0

$a\times(+\infty) = +\infty$

$a\times(-\infty) = -\infty$

Se a<0

$a\times(+\infty) = -\infty$

$a\times(-\infty) = +\infty$

Consequências do quociente de limites:

$\dfrac{a}{+\infty} = 0 \qquad \dfrac{a}{-\infty} = 0$

Se a>0

$\dfrac{+\infty}{a} = +\infty$

$\dfrac{-\infty}{a} = -\infty$

$\dfrac{a}{0^+} = +\infty$

$\dfrac{a}{0^-} = -\infty$

Se a<0

$\dfrac{+\infty}{a} = -\infty$

$\dfrac{-\infty}{a} = +\infty$

$\dfrac{a}{0^+} = -\infty$

$\dfrac{a}{0^-} = +\infty$

Exercícios:

1. Considera a função $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$

a) Represente graficamente a função.

b) Indique se existir: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ $\quad\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ $\quad\lim\limits_{x\to -3} f(x)$

c) Calcule $f(0)$ e $f(3)$. Compare os resultados que obtiveste com os limites correspondentes ao mesmo ponto obtidos em b)

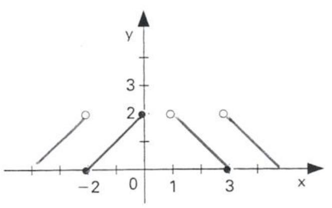
2. Para cada uma das funções investiga qual é $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

a) $f(x) = 2x + 3$ **b)** $f(x) = \dfrac{3}{x}$ **c)** $f(x) = senx$

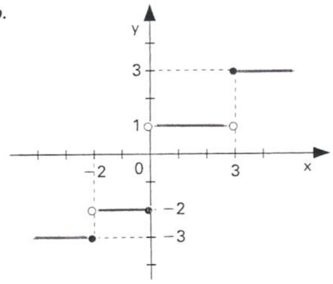
3 Usa o gráfico das seguintes funções para indicar, caso exista:

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ $\quad\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ $\quad\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ $\quad\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

a.

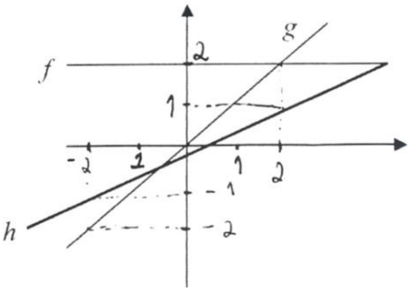


b.



4.

. Na figura onde estão representadas as funções f, g e h.



Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ $\quad \lim\limits_{x \to -3} f(x)$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \left[g(x) + h(x)\right]$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} \left[f(x) + g(x)\right]$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left[g(x) \times h(x)\right]$ $\quad \lim\limits_{x \to -2} \left[f(x) \times g(x)\right]$

5. As funções f e g têm domínio IR. Sabendo que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0{,}3$ e $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -2$,

Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left[f(x) + g(x)\right]$ $\quad$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \left|g(x)\right|$ $\quad$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \left[-g(x)\right]$

6.

Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1}$ $\quad$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x-1}$ $\quad$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-10}{x-1}$ $\quad$ **e)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-10}{x-1}$ $\quad$ **f)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{10}{x-1}$

7.

Sendo f uma função definida por: $\quad f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{se } x \geq 2 \\ \dfrac{x}{x-2} & \text{se } x < 2 \end{cases}$

a) Calcule: $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ $\quad \lim\limits_{x \to -1} f(x)$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) Investiga se existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

8.

Considera as funções definidas por:

$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 1 \\ x+1 & \text{se } x \leqslant 1 \end{cases}$ e $h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{2}x + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

a) Averigua se existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

b) Calcula $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$.

c) Determina: $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.