

ASSÍMPTOTAS

ASSÍMPTOTAS VERTICAIS E NÃO VERTICAIS

ASSÍMPTOTAS VERTICAIS

Se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) então a recta de equação $x = a$ é assímtota vertical do gráfico de f .

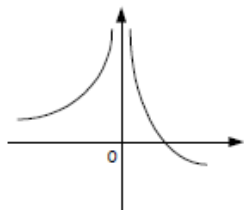
Como calcular as assímtotas verticais?

1. Determinar o domínio da função
2. Determinar os pontos de descontinuidade (nas funções com módulos, quando se desdobram em ramos)
3. Calcular $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ (a são os pontos que não pertencem ao domínio ou os pontos de descontinuidade)
4. Se algum destes limites for $+\infty$ ou $-\infty$, a recta de equação $x = a$ é uma assímtota vertical.



ASSÍMPTOTAS VERTICAIS

Exemplos:

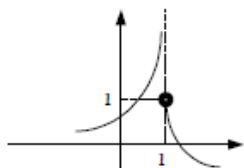


$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

Logo, $x = 0$ é uma
assíntota vertical bilateral

As assíntotas verticais podem existir nos pontos de acumulação que não pertencem ao domínio. Explo n.º 1.

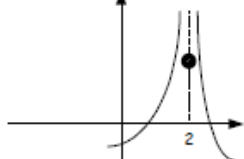


$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

Logo, $x = 1$ é uma assíntota
vertical unilateral

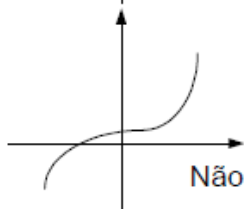
Podem existir assíntotas nos pontos de descontinuidade.



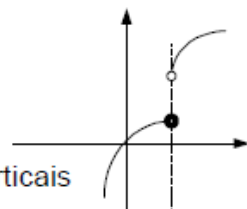
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$$

Logo, $x = 2$ é uma assíntota
vertical bilateral



Não têm assíntotas verticais



Uma função de domínio \mathbb{R} com pontos de descontinuidade pode não ter assíntotas verticais. Explo n.º 5, porque $\lim_{x \rightarrow b} f(x) \neq \infty$

ASSÍMPTOTAS VERTICAIS

Se uma função for contínua em \mathbb{R} não tem assímtotas verticais.

As funções polinomiais não têm assímtotas verticais porque são contínuas em \mathbb{R} .



ASSÍMPTOTAS NÃO VERTICAIS

Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$ (ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$) então a recta de equação $y = mx + b$ é assíntota do gráfico de f .

Como calcular assíntotas não verticais?

- $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ (ou $x \rightarrow -\infty$)
- $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$ (ou $x \rightarrow -\infty$)

Se $m = 0$
Assíntota Horizontal
 $y = b$

$$\underline{b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]}$$

Se $m \neq 0$
Assíntota Oblíqua
 $y = mx + b$

$$\underline{b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]} \quad (\text{ou } x \rightarrow -\infty)$$

ASSÍMPTOTAS NÃO VERTICAIS

OBSERVAÇÕES

- Se algum dos limites for infinito ou não existir, não há assímtotas não verticais.
- As assímtotas podem ser diferentes quando $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$. Isto acontece, principalmente, quando há funções com e^x , uma vez que $e^{+\infty} = +\infty$ e $e^{-\infty} = 0$.
- Se o domínio for, por exemplo, \mathbb{R}^+ , não faz sentido calcular a assímtota para $-\infty$ e vice-versa.
- Uma função pode ter infinitas assímtotas verticais, mas nunca tem mais do que duas assímtotas não verticais (horizontais ou oblíquas).
- Se o domínio de uma função for um conjunto limitado, o seu gráfico não tem assímtotas não verticais



EXERCÍCIOS (saídos em exames nacionais)

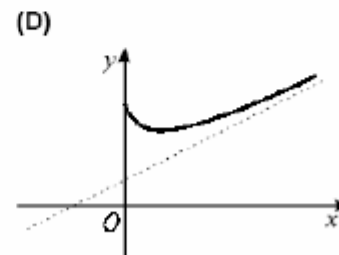
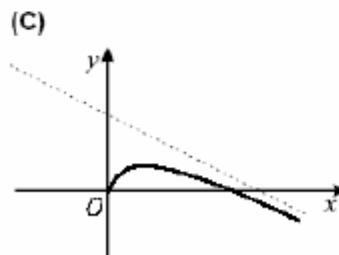
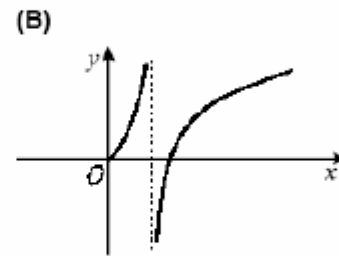
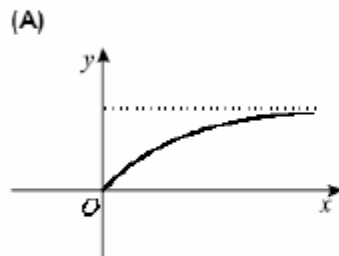
Considere uma função g , de domínio $[0, +\infty[$, contínua em todo o seu domínio.

Sabe-se que:

- O gráfico de g tem uma única assíntota

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2}$

Em qual das alternativas seguintes podem estar representadas, em referencial o. n. xOy , parte do gráfico da função g e, a tracejado, a sua assíntota?



2003 – 1ª Fase, 1ª Chamada

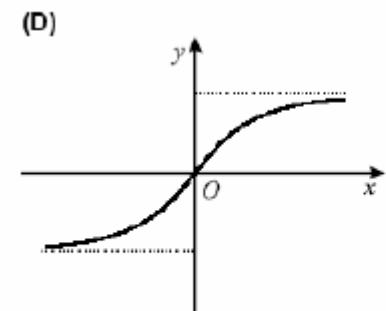
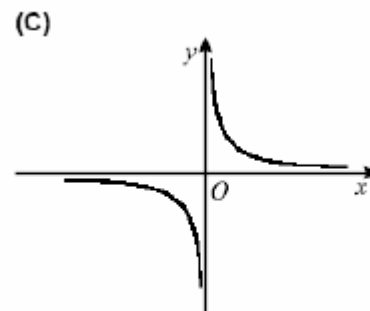
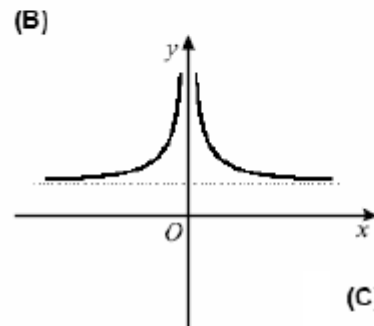
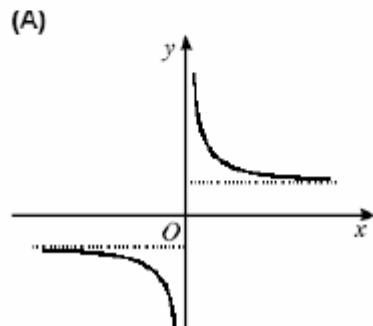
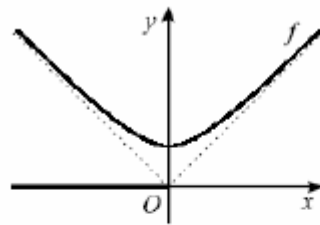
EXERCÍCIOS (saídos em exames nacionais)

Na figura junta está representada parte do gráfico de uma função f de domínio \mathbb{R} , contínua em todo o seu domínio.

A bissetriz dos quadrantes pares e a bissetriz dos quadrantes ímpares são assíntotas do gráfico de f .

Indique em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função g definida por

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$



EXERCÍCIOS (saídos em exames nacionais)

Considere uma função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{5\}$, continua em todo o seu domínio.

Sabe-se que:

- $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = -3$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$

Em cada uma das opções seguintes, estão escritas duas equações, representando cada uma delas uma recta.

Em qual das opções as duas rectas assim definidas são as assíptotas do gráfico da função f ?

(A) $y = x$ e $y = 2$

(B) $y = 2$ e $x = 5$

(C) $y = x$ e $x = 5$

(D) $y = -3$ e $x = 2$

2005 – 1ª Fase

EXERCÍCIOS (saídos em exames nacionais)

De uma função h , de domínio \mathbb{R}^- , sabe-se que a recta de equação $y = 2$ é assíntota do seu gráfico.

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{e^x}$?

(A) $+\infty$

(B) $-\infty$

(C) 0

(D) 2

2002 – 1ª Fase, 2ª Chamada

